

Міністерство освіти і науки України

*Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат
при Львівському національному університеті
імені Івана Франка*

„ЛЕВЕНЯ – 2013” ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник



Львів
Каменяр
2013

УДК 372.853
ББК 74.265.1-922
Л35

Цю книжку оргкомітет конкурсу підготував для переможців, сподіваючись, що зібрані в ній матеріали будуть корисними для учнів, які цікавляться різними видами інтелектуальних змагань (олімпіади, конкурси, турніри) з фізики, та для вчителів, які їх готуватимуть. Повні списки переможців конкурсу подано на сайті levenia.com.ua.

Упорядник
Володимир Алексейчук

Дорогі шанувальники Левеня!

Щиро вітаю з успішним виступом у Всеукраїнському фізичному конкурсі «Левеня – 2013»!

З року в рік учасники змагань радують нас своїми перемогами і досягненнями! Сподіваюсь, що для багатьох учнів цей конкурс може стати визначальною подією у становленні їхнього подальшого життєвого шляху, пов'язаного з фізикою, яка є, безумовно, актуальною областю людського знання. Впевнена, що ці прагнення до знань втіляться в чудові результати, які принесуть свої плоди і користь у майбутньому.

Приємно, що в нашій країні є багато талановитої, творчої молоді, яка цікавиться досягненнями в сучасній науці і вже зі шкільної лави досягає успіхів у вивченні таємниць природи.

Успішне проведення конкурсу неможливе без багатьох людей, тих, хто прикладає чимало зусиль для його організації та наполегливої роботи щодо підготовки школярів до змагань.

Висловлюю щиру подяку центральному оргкомітету, співробітникам базової організації – Львівського фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті імені Івана Франка, регіональним координаторам, усім тим, хто здійснює величезну і важливу роботу щодо залучення в науку молодих талановитих людей, без яких освіта та наукові дослідження не мають імпульсу у своєму розвитку.

Бажаю ніколи не зупинятися на досягнутому, втілити в життя найсміливіші плани.

Нехай талант і бажання пізнавати нове ніколи не вичерпуються, а творчі починання завжди супроводжує удача.

Держайте і прагніть своєї мети, нових творчих відкриттів!

З найкращими побажаннями,

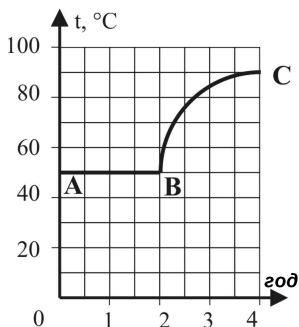
Олена Вікторівна Хоменко,
головний спеціаліст
Міністерства освіти і науки України

Міністерство освіти і науки України
І Всеукраїнська олімпіада юних фізиків, м. Херсон, 2013

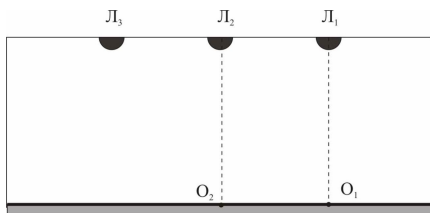
Теоретичний тур

8 клас

8.1. Полімер вмістили в калориметр із нагрівачем. Перші дві години температура полімеру була 50°C . При цьому потужність нагрівача складала $P_0 = 0,6 \text{ Вт}$. Наступні дві години температура полімеру змінювалася так, як показано на малюнку (криву BC можна прийняти за чверть кола). Яка кількість теплоти була передана навколишньому середовищу за перші дві години? Яка кількість теплоти була передана навколишньому середовищу за наступні дві години? Потужність втрат тепла з калориметра прямо пропорційна різниці температур всередині й зовні калориметра. Теплоємністю калориметра знехтувати. Температура в лабораторії 20°C . Агрегатний стан полімеру не змінюється.

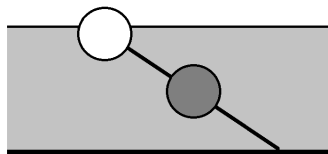


8.2. У кімнаті по черзі вмикають три однакові лампи L_1 , L_2 і L_3 (див. мал.). При цьому освітленість у точці O_1 , що знаходиться прямо під першою лампою, зростає в 1,8 раза при увімкненні другої лампи, і ще в 1,26 раза при увімкненні третьої. А як зростає освітленість при увімкненні другої і третьої ламп у точці O_2 , що знаходиться під другою лампою? Відстані між лампами однакові, стіни кімнати світла не відбивають.



8.3. Дві вертикальні стіни сходяться під кутом 60° і утворюють ущелину. Турист поставив намет на однаковій відстані 200 м від обох стін. Тихою морозною ніччю він вийшов з намету і заблукав, а потім зупинився і крикнув. Перше відлуння турист почув через $3/4$ с, друге – через $5/4$ с. Через який час він почує інші відлуння і скільки їх буде? Що слід робити туристу, щоб повернутися до намету і скільки кроків відділяє його від нього? Швидкість звуку у повітрі – $v = 20\sqrt{T}$, де T – температура в Кельвінах, v – швидкість в м/с. Температура повітря -17°C , довжина кроку туриста 50 см.

8.4. Дві кулі однакового розміру прикріплені до тонкого стержня, причому масивна – до середини стержня, а легка – до його кінця. При зануренні у воду в неглибокому місці вільний кінець стержня спирається на дно, і з води виступає лише частина легкої кулі (див. мал.), причому відношення об'єму виступаючої частини до об'єму всієї кулі дорівнює n . За яких значень n система буде плавати на глибокій воді? Маси легкої кулі і стержня вважати мізерно малими.



8.5. На зеленому лузі пасуться два цапки (див. мал.). Сірий цапок увесь час рухається на захід і до вечора проходить 800 метрів. Білий цапок увесь час рухається на північ і до вечора проходить 600 метрів. При цьому відстань між ними ввечері виявилася такою ж, як вранці – 1300 метрів. Яка мінімальна відстань була між цапками, якщо вони рухалися з постійною швидкістю? На яку мінімальну відстань могли б зблизитися цапки, якби їм було дозволено довільно змінювати величину своєї швидкості (не змінюючи напрямку руху і величини кінцевих переміщень)?



Білий

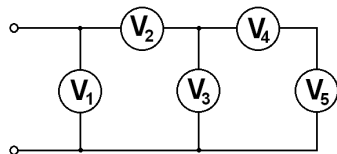
Сірий

Задачі запропонували Є. П. Соколов (1,2,5), О. Ю. Орлянский (3), С. У. Гончаренко (4).

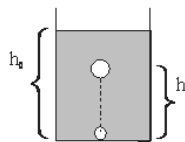
9 клас

9.1. Легкий одномоторний літак масою $m = 1000$ кг може летіти при мінімальній силі тяги двигуна $F = 2000$ Н. При польоті на висоті 1 км, на відстані 4 км до посадкової смуги аеродрому, у літака раптово глохне двигун. Чи зможе він в такому випадку спланувати (долетіти як планер) до аеродрому?

9.2. З п'яти однакових вольтметрів зібране електричне коло (див. мал.). Покази вольтметрів: $U_1 = 5$ В, $U_2 = 4$ В, $U_3 = 2$ В, $U_4 = 1$ В, $U_5 = 1$ В. Відомо, що в одного з вольтметрів зігнута стрілка, і його покази неправильні. Який з вольтметрів несправний? Яке значення напруги він повинен був показувати?

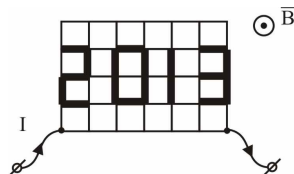


9.3. На дні широкої посудини, заповненої важкою в'язкою рідиною, знаходиться повітряна бульбашка, що відривається від дна і починає повільно спливати (див. мал.). Яка кількість тепла виділиться в рідині до того моменту, коли бульбашка підніметься на висоту $h = 3h_0/4$, якщо при цьому її об'єм збільшився удвічі?

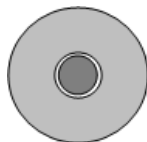
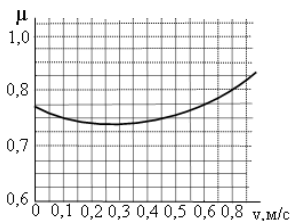


Рух бульбашки настільки повільний, що кінетичною енергією рідини можна знехтувати. Глибина рідини $h_0 = 1,5$ м, її густина $\rho = 13\,600$ кг/м³, початковий об'єм бульбашки $V_0 = 1$ см³.

9.4. У прямокутній сітці 4х6 вісімнадцять ребер виготовлені з товстішого дроту (див. мал.). Сітку вміщують у магнітне поле з індукцією $B = 0,01$ Тл, перпендикулярне площині малюнка, і підводять електричний струм силою $I = 0,61$ А. Чому дорівнює сила Ампера, що діє на сітку, якщо сторона кожного квадрата сітки дорівнює $a = 5,5$ см? Сила Ампера розраховується за формулою $F_A = I \cdot B \cdot l$, де l – довжина провідника.



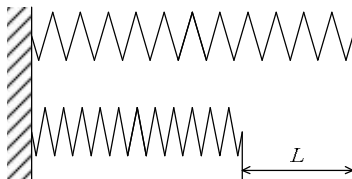
9.5. Два тягарці масами $M = 5$ кг і $m = 3$ кг з'єднали легкою довгою ниткою, яку перекинули через блок (нитка по блоку не проковзує) масою $m_0 = 2$ кг. Тягарцям надали деяку швидкість. Через деякий час швидкість стала постійною. Знайдіть цю швидкість. Блок являє собою диск радіусом R з отвором радіусом $r = R/3$, надітий на горизонтальну вісь трохи меншого, ніж r , радіусу (див. мал.). Залежність коефіцієнту тертя ковзання μ від швидкості відносного руху поверхонь для матеріалів блоку і осі наведена на графіку $\mu(v)$ (див. мал.).



Задачі запропонували В. П. Сохацький (1), С. У. Гончаренко (2), Є. П. Соколов (3-4), О. Ю. Орлянський (5).

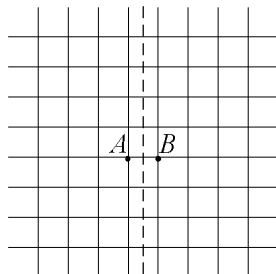
10 клас

10.1. Кінці двох невагомих пружин жорсткостями k_1 і k_2 прикріплені до стіни, так як показано на малюнку. Спочатку пружини недеформовані, і перша на L довша за другу. Яку мінімальну роботу A треба виконати, щоб вільні кінці пружин встановити на однаковій відстані від стіни?

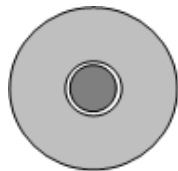


10.2. Циліндричну посудину, наповнену водою, рівномірно обертають навколо її вертикальної осі симетрії з кутовою швидкістю ω . Паралельний пучок світла, що падає вертикально, відбивається від поверхні води. Визначте відстань від нижньої точки поверхні води до точки, в якій інтенсивність відбитого світла буде найбільшою.

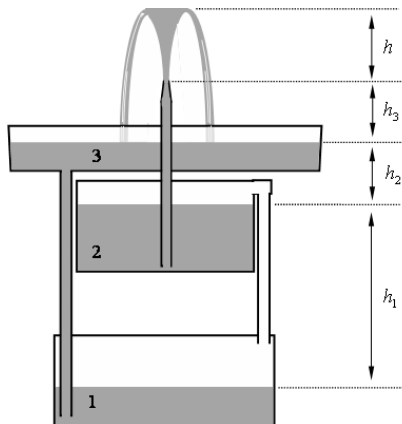
10.3. З тонкого дроту площею перерізу S спаяли сітку з величезною кількістю квадратних комірок. На значному віддаленні від країв сітки до точок A і B , у сусідніх вузлах, приклали напругу U (див. мал.). Визначте сумарний струм у всіх провідниках, які на рисунку перетинає пунктирна лінія. Знайдіть ділянки дроту, через які струм не йтиме. Доведіть, що у центрі будь-якого квадрату сітки загальне магнітне поле, створене чотирма струмами сторін квадрату, дорівнює нулю. Сторона квадрату дорівнює a , питомий опір матеріалу дроту ρ .



10.4. Два тягарці масами m і M ($m < M$) з'єднали ниткою. Нитку перекинули через невагомий блок і тягарці обережно відпустили. Знайдіть залежність прискорення a тягарців від відношення їхніх мас $x = m/M$ та побудуйте графік $a(x)$. Блок являє собою диск радіусом R з отвором радіусом $r = R/3$, надітий на горизонтальну вісь трохи меншого, ніж отвір, радіусу (див. мал.). Коефіцієнт тертя між внутрішньою поверхнею блока та віссю $\mu = 0,75$. Перекинута через зовнішній обід блоку нитка не проковзує.



10.5. 2000 років тому Герон Олександрійський запропонував конструкцію фонтану (див. мал.), що складається з трьох сполучених посудин, у дві з яких (1 і 2) нема доступу повітря. Поясніть принцип дії фонтану. Знайдіть висоту фонтану h , а також швидкості зміни рівня води в усіх посудинах у момент часу, коли $h_1 = 3$ м, $h_2 = 1$ м, $h_3 = 0,5$ м, а загальний об'єм повітря у першій і другій посудинах 4 м³. Площі перерізу посудин



$S_1 = 3 \text{ м}^2$, $S_2 = 2 \text{ м}^2$, $S_3 = 4 \text{ м}^2$, площа перерізу вузького отвору, з якого вилітає вода, $S = 1 \text{ м}^2$. Енергетичними втратами під час руху води всередині фонтану, а також товщиною трубок у порівнянні з розмірами посудин знехтувати. Вважати, що атмосферний тиск 10^5 Па і температура повітря залишаються сталими, а прискорення вільного падіння дорівнює $9,8 \text{ м/с}^2$.

Задачі запропонували С. У. Гончаренко (1), В. П. Сохацький (2), О. Ю. Орлянський (3 – 5)

11 клас

11.1. Експериментально визначити відношення теплоємностей газу при сталому тиску і сталому об'ємі $\gamma = C_p/C_v$ можна таким методом. Певну кількість молів газу ν , початкові значення об'єму і тиску якого дорівнюють V та p , нагрівають двічі за допомогою спіралі, по якій пропускають той самий струм протягом однакового часу: спершу – при сталому об'ємі, причому кінцевий тиск складає p_1 , потім – при сталому тиску, причому кінцевий об'єм складає V_2 . Як за цими даними знайти γ , вважаючи газ ідеальним?

11.2. Визначити, як рухатиметься розріджена повністю іонізована плазма, вміщена в електричне та магнітне поля, спрямовані взаємно перпендикулярно. Чи можна вважати, що плазма рухатиметься як єдине ціле? Швидкості усіх частинок плазми вважати набагато меншими за швидкість світла. Зіткненнями між частинками плазми знехтувати.

11.3. Штучний супутник Землі рухається коловою орбітою, яка проходить над полюсами. Виникла необхідність перевести його на іншу колову орбіту такого самого радіуса, яка теж проходить над полюсами. Площини орбіт мають утворювати двогранний кут α . Як можна змінити орбіту, вмикаючи двигун на короткий час, щоб витратити якнайменше пального? Розгляньте випадки: $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$. Зміну маси супутника через витрату пального не враховуйте.

11.4. До двох контактів, що знаходяться один від одного на відстані S по горизонталі і h по вертикалі, підвісили за краї тонкий немагнітний металевий ланцюжок довжиною l з великою кількістю ланок. Ланцюжок висить в однорідному магнітному полі, перпендикулярному площині ланцюжка. Коли через ланцюжок почали пропускати деякий сталий струм, його форма змінилася так, що біля нижчого контакту він став горизонтальним, а біля вищого – вертикальним. Знайдіть відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на кожну ланку ланцюжка, а також на весь ланцюжок в цілому.

11.5. Коші запропонував наближену формулу $n = a + b/\lambda^2$ залежності показника заломлення n від вакуумної довжини хвилі λ . Визначте коефіцієнти a і b для води, якщо показник заломлення фіолетового світла ($\lambda = 390$ нм) дорівнює 1,341, а червоного ($\lambda = 730$ нм) – 1,326. Завдяки дисперсії світла ми спостерігаємо веселку. Зобразіть хід променів через краплю води, який обумовлює веселку, і визначте, під якими кутами до напрямку сонячних променів спостерігаються її граничні смуги. Крім первинної веселки іноді можна спостерігати вторинну. Завдяки чому утворюються вторинна веселка? Чи знайдеться за межами оптичного діапазону довжина λ' електромагнітної хвилі, для якої первинна і вторинна веселки починають зливатися в одну? Якщо так, оцініть λ' , якщо ні, поясніть чому.

Задачі запропонували С. У. Гончаренко (1), І. О. Анісімов (2),
І. М. Гельфгат (3), О. Ю. Орлянський (4,5)

Експериментальний тур

8 клас

Завдання 1. Виміряти площу плоскої фігури довільної форми, не використовуючи метод палетки.

У звіті подайте план проведення вимірювань.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: олівець; лінійка; мідний дріт ($\rho_{\text{м}} = 8,9 \text{ г/см}^3$); фігура довільної форми. *Групове:* ножиці.

Завдання 2. За допомогою запропонованого обладнання:

– виготовте пристрій для підняття вантажу з кількома різними значеннями виграшу в силі.

– визначте максимальний виграш у силі, який Вам вдалося отримати;

– побудуйте та поясніть графік залежності ККД пристрою від виграшу у силі.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: металеві кільця (2 шт.); динамометр; пляшка з водою; штатив шкільний з муфтою і лапкою; міліметровий папір. *Групове:* котушка ниток; ножиці.

9 клас

Завдання 1. За допомогою запропонованого обладнання:

– визначте опір невідомого резистора;

– на основі вольтметра виготовити омметр зі шкалою (нуль шкали зліва), що дозволяє визначати значення будь-якого вимірюваного опору за новою шкалою приладу;

– зобразити шкалу омметра, ґрунтуючись на зображенні шкали вольтметра (шкала повинна бути достатньо детальною для практичного використання).

У звіті подати:

– теоретичне обґрунтування обраної методики зі всіма необхідними малюнками та виведенням формули для градування омметра;

– схему установки для вимірювання, принцип її дії;

– порядок виконання вимірювань, таблиці з проміжними та остаточними результатами;

– оцінку точності отриманих результатів.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: джерело постійної напруги (батарея «Крона»); резистор змінного опору з максимальним значенням $6,8 \text{ кОм}$; шкільний вольтметр з максимальним значенням 6 В ; резистор з відомим опором $3,0 \text{ кОм}$; резистор з невідомим опором; з'єднувальні провідники; зображення шкали вольтметра.

Завдання 2. За допомогою запропонованого обладнання:

- виготовити пристрій для піднімання вантажу фіксованої ваги з декількома різними значеннями виграшу в силі;
- визначте максимальний виграш в силі, який вам вдалось отримати;
- побудуйте та проаналізуйте графік залежності ККД пристрою від прикладеної сили;
- порівняйте теоретичні та експериментальні результати.

У звіті подати:

- теоретичне обґрунтування обраної методики зі всіма необхідними рисунками та виведенням формули;
- схему виготовленого пристрою та принцип його дії;
- порядок виконання вимірювань, таблиці з проміжними та остаточними результатами;
- оцінку точності та аналіз отриманих результатів.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: металеві кільця (2 шт.); динамометр; пляшка з водою; штатив шкільний з муфтою і лапкою; міліметровий папір. *Групове:* катушка ниток.

10 клас

Завдання 1. За допомогою запропонованого обладнання:

- визначте питому теплоємність невідомого сплаву;
- визначте теплоємність калориметра (пластмасової склянки);
- знайдіть питому теплоту плавлення невідомого сплаву;
- оцініть точність розробленої Вами методики експерименту.

У звіті подати:

- теоретичне обґрунтування обраних методик з усіма необхідними малюнками та виведенням формули для визначення питомої теплоємності сплаву, теплоємності пластикового калориметра і питомої теплоти плавлення сплаву;
- порядок виконання вимірювань, таблиці з проміжними і остаточними результатами;
- оцінку точності отриманих результатів.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: серветки; аркуш паперу А4; дріт з легкоплавкого сплаву (температура плавлення 192°C); термометр з теплоємністю (45 ± 1) Дж/К; штатив шкільний з лапками; шприц медичний мірний 20 мл; пластикова посудина невеликої ємності; одноразова пластикова склянка; коробок сірників; олівець круглий; лінійка дерев'яна; монетка 1 коп (маса 1,5 г). *Групове:* електрочайник з гарячою водою; ємність

з холодною водою; ємність для зливу відпрацьованої води; ножиці; котушка ниток; рулончик скотчу.

Завдання 2. Зберігаючи більшу частину рулону скотча, визначте за допомогою запропонованого обладнання:

- довжину скотча в рулоні;
- товщину стрічки скотча;
- мінімальну силу, необхідну для розмотування рулону;
- роботу, яку потрібно здійснити, щоб розмотати весь рулон;
- питому поверхневу енергію адгезії (енергію, необхідну для розділення поверхонь скотча, що припадає на одиницю площі їх контакту).

У звіті подати:

- теоретичне обґрунтування обраної методики, виведення робочих формул;
- схему вимірювальної установки, принцип її дії;
- порядок виконання вимірювань, таблиці з проміжними і остаточними результатами;
- оцінку точності отриманих результатів.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: рулончик скотчу (ширина 18 мм); плоска дерев'яна лінійка довжиною 30 см; чотири п'ятикопійчані монети (маса однієї монети 4,3 г). *Групове:* порожня шпуля з-під скотчу (2 – 3 на групу); ножиці.

11 клас

Завдання 1. За допомогою запропонованого обладнання:

- відпрацюйте техніку, що дозволить досягти стійкого колового руху кульки вздовж внутрішньої конічної поверхні лійки (кулька не повинна торкатися циліндричної частини лійки);
- дослідіть цей рух (вважаючи, що під час такого руху кульки усі енергетичні втрати пов'язані лише з тертям кочення), визначте коефіцієнт тертя кочення сталеві кульки по поверхні лійки.

У звіті подати:

- теоретичне обґрунтування обраної методики з усіма необхідними малюнками, схемою проведення експерименту та виведенням формули для визначення коефіцієнту тертя кочення;
- порядок виконання вимірювань;
- таблиці з проміжними та кінцевими результатами;
- оцінку точності отриманих результатів та висновки.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: конічна пластикова лійка; сталеві кульки; лінійка учнівська; аркуш паперу; короткий грифельний олі-

вещь. *Групова*: рулончик скотчу (ширина 18 мм, 2 – 3 на групу); пристрій для заточування олівців (2 – 3 на групу)

Вказівка: Сила тертя кочення може бути розрахована за формулою $F_{\text{тр}} = k N/R$, де: k – коефіцієнт тертя кочення (має розмірність довжини); R – радіус тіла, що котиться; N – сила притискання (сила нормального тиску).

Завдання 2. За допомогою запропонованого обладнання:

- отримайте експериментальну залежність потужності, що виділяється на зовнішній частині кола, від її опору;
- дослідіть залежність ККД джерела від опору зовнішньої частини кола;
- порівняйте результати досліджень з теоретичними розрахунками; поясніть причину суттєвих відмінностей експериментальних результатів від теоретичних розрахунків;
- знайдіть опір еталонного резистора.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: джерело струму з припаяними провідниками; шкільний амперметр; провідник з'єднувальний з припаяною голкою; відрізок манганінового дроту (опір одного метра дроту 8 Ом); лінійка; міліметровий папір. *Групова*: ножиці; рулон скотчу.

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

8 клас

Задача 8.1

1) Якщо температура зразка не змінювалася, то все тепло, що виділилося за рахунок роботи нагрівача, було передано навколишньому середовищу: $Q_1 = P_0 \cdot \tau_1 = 4320$ Дж.

2) Потужність втрат тепла калориметра пропорційна різниці температур усередині й зовні калориметра. Коли різниця температур постійна, формула для потужності теплопередачі може бути записана так: $P_1 = k \cdot \Delta t$, а

для кількості тепла $Q_1 = k \cdot \Delta t \cdot t_1$, де Δt – різниця температур калориметра і оточуючого середовища, τ_1 – час теплообміну, k – коефіцієнт пропорційності.

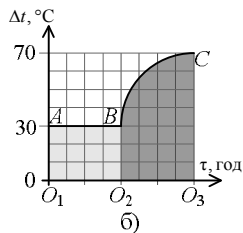
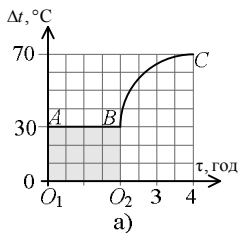
Добуток $\Delta t \cdot \tau_1$, який входить у формулу для теплоти $Q_1 = k \cdot \Delta t \cdot \tau_1$, можна трактувати як площу S_1 під графіком залежності різниці температур Δt від часу (площа фігури O_1ABO_2 на мал., а). Тому формулу для втрат тепла можна записати $Q_1 = k \cdot S_1$.

Ця форма запису є загальною і годиться для випадку, коли різниця температур змінюється.

$Q_2 = k \cdot S_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot k \cdot S_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot Q_1$, де S_1 – площа прямокутника O_1ABO_2 ,

S_2 – площа фігури O_2BCO_3 (див. мал., б). Фігуру O_2BCO_3 можна представити як прямокутник і чверть еліпса (еліпс тому, що розмірність на вісях різна).

$$\text{Тому } Q_2 = \frac{S_2}{S_1} Q_1 = \frac{S_1 + \frac{1}{4} S_{\text{еліпса}}}{S_1} Q_1 = \frac{30 \cdot 2 \cdot 3600 + \frac{1}{4} \pi \cdot 40 \cdot 2 \cdot 3600}{30 \cdot 2 \cdot 3600} 4320 = 8844 \text{ Дж.}$$



Задача 8.2

Нехай у точці O_1 перша лампа створює освітленість E_1 , друга – E_2 , а третя – E_3 . Використовуючи ці величини, ми можемо знайти значення освітленості в точках O_1 і O_2 при послідовному включенні ламп (див. табл.).

	L_1	$L_1 + L_2$	$L_1 + L_2 + L_3$
точка O_1	E_1	$E_1 + E_2$	$E_1 + E_2 + E_3$
точка O_2	E_2	$E_1 + E_2$	$E_1 + 2E_2$

Умова, що в точці O_1 при включенні другої лампи освітленість збільшується в $k = 1,8$ раза, дозволяє знайти відношення $\frac{E_2}{E_1}$. Дійсно: $k = \frac{E_1 + E_2}{E_1}$, звідки $E_2 = 0,8E_1$.

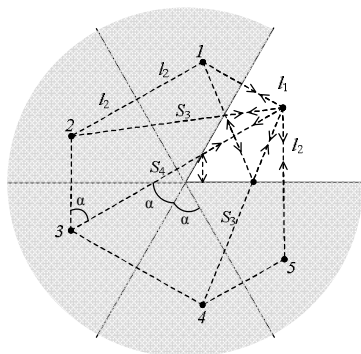
При включенні другої лампи освітленість у точці O_2 збільшується в $k_1 = (E_1 + E_2)/E_2 = 2,25$ раза.

При включенні третьої лампи освітленість у точці O_2 збільшується в $k_1 = (E_1 + 2E_2)/(E_1 + E_2) = 1,44$ раза.

Задача 8.3

Якщо перше відлуння турист почув через $t_1 = 3/4$ с, відстань, яку пройшов звук до ближчої стіни ущелини і повернувся назад, дорівнює $S_1 = \nu t_1 = 240$ м. Отже відстань від туриста до цієї стіни ущелини $l_1 = \frac{1}{2}\nu t_1 = 120$ м. Аналогічно, відстань до другої стіни ущелини $l_2 = \frac{1}{2}\nu t_2 = 200$ м. Щоб знайти, скільки всього було відлунь і через який час вони надійшли, скористаємось методом дзеркальних відображень (див. мал.).

Ми бачимо шестикутник з вершинами у місцях, де знаходиться турист (джерело звуку) та п'ять його зображень (уявних джерел звуку). Складається враження, що турист має почути п'ять відлунь, але, оскільки дві відстані (позначені S_3) є однаковими, через час $t_3 = S_3/\nu$ два відлуння (кожне після двох відбивань) прозвучать одночасно. Останнє відлуння прозвучить через час $t_4 = S_4/\nu$. Знайдемо відстані S_3 та S_4 . Відстань S_4 знаходиться швидко, оскільки вона є основою рівнобедреної трапеції з кутами 60° і 120° : $S_4 = S_2 + S_1 = 2(l_2 + l_1) = 640$ м. Відстань S_3 можна знайти, якщо опустити з точки третього зображення перпендикуляр на S_4 та визначити катети утвореного прямокутного трикутника ($2l_2 + l_1$ і $\sqrt{3}l_1$), і далі знайти S_3 , як гіпо-

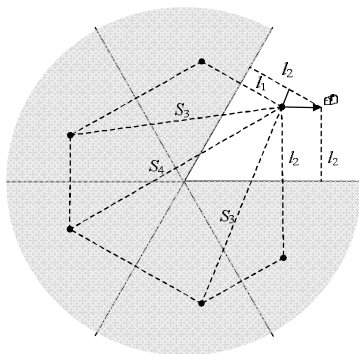


тенузу за теоремою Піфагора $S_3^2 = (2l_2 + l_1)^2 + 3l_1^2 = 560^2 \text{ м}^2$.

Отже: $S_3 = 560 \text{ м}$; $t_3 = 7/4 \text{ с}$; $t_4 = 2 \text{ с}$.

Оскільки відстань до другої стіни виявилась 200 м, тобто, такою ж, як і відстань до цієї стіни від намету, туристу слід рухатись перпендикулярно до напрямку, звідки надійшло друге відлуння (паралельно до другої стіни), залишаючи за спиною звуки третіх і четвертого відлунь. Протягом його руху час t_2 , через який надходить друге відлуння, має залишатися незмінним, а час надходження першого відлуння t_1 буде збільшуватись. Коли час t_1 зрівняється з t_2 , слід шукати палатку.

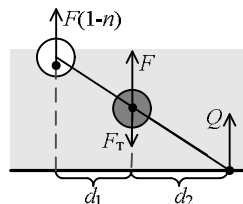
Кількість кроків легко знаходиться з прямокутного трикутника з кутами 30° і 60° . Маємо 185 кроків.



Задача 8.4

Розглянемо сили, що діють на систему (дві кулі і стрижень). На легку кульку діє сила Архімеда, величина якої пропорційна зануреному об'єму (за умовою нехтуємо силою тяжіння). На важку кулю діє і сила тяжіння, і сила Архімеда. Сума всіх діючих на систему сил дорівнює нулю, оскільки система знаходиться в рівновазі: $F_T = F + F(1-n) + Q$. Запишемо рівність моментів сил відносно центру масивної кулі. $Q \cdot d_1 = F(1-n) \cdot d_2$. Врахуємо, що плечі сил однакові $d_1 = d_2$, тоді отримаємо $Q = F(1-n)$. Остаточне співвідношення між силами буде таким $F_T = F + 2F(1-n) = F(3-2n)$

На глибокому місці максимальне значення сили Архімеда досягатиметься при повному зануренні обох куль, що дорівнює $2F$. Якщо сила $2F$ виявиться більшою за силу тяжіння F_T , то стрижень з кулями плаватиме у вертикальному положенні і легка куля, розташовуючись зверху, частково виступатиме з води або (в стані байдужої рівноваги) буде повністю занурена у воду (при $F_T = 2F$).



Отже, умова плавання на глибокій воді матиме вигляд $F_T \leq 2F$. Підставляючи в ліву частину цієї нерівності $F_T = F(3-2n)$, дістанемо $3-2n \leq 2$ і отримаємо відповідь $n \geq 1/2$. Це означає, що система не потоне,

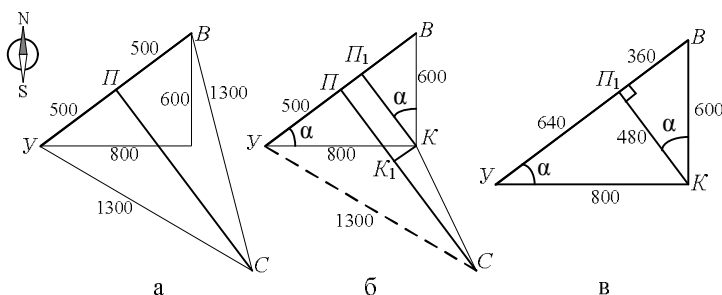
якщо на мілкій воді легка куля виступатиме з води не менше, ніж на половину.

Задача 8.5

Складно стежити за двома цапками, що рухаються одночасно, тому перейдемо у систему відліку, пов'язану, наприклад, з сірим цапком. У цій системі відліку сірий цапок нерухомий, а білий цапок матиме дві компоненти швидкості: одну направлену на схід та іншу – направлену на північ (див. мал., а). Переміщення за день білого цапка буде складати 800 метрів на схід та 600 метрів на північ.

1) Знайдемо відстань у випадку мінімального зближення. Якщо швидкості цапків не змінюються, то їх траєкторія – відрізок УВ довжиною 1000 метрів. А мінімальну відстань між цапками дає перпендикуляр, проведений з точки С на цей відрізок. Його довжину можна знайти, записуючи теорему Піфагора для трикутника УРС:

$$PC = \sqrt{UC^2 - UP^2} = \sqrt{1300^2 - 500^2} = 1200 \text{ м.}$$



2) Якщо величини швидкостей можна змінювати довільно (при цьому залишаючи незмінними напрямки руху), то білий цапок може прийти у будь-яку точку трикутника УВК (див. мал. б). Тут точка У – початкове положення білого цапка. Найближчою до точки С точкою цього трикутника є точка К. Довжина відрізка КС і буде відповіддю на друге питання. Знайдемо її. З малюнка в видно, що прямокутні трикутники УР1К і УКВ подібні. Тоді, оскільки $UB = 1000 \text{ м}$, справедливе співвідношення: $\cos \alpha = \frac{500 + PP_1}{800} =$

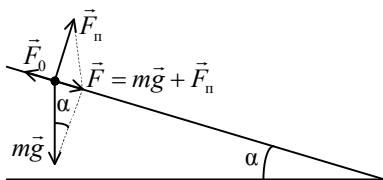
$$= \frac{800}{1000} \Rightarrow PP_1 = 140 \text{ м} = KK_1. \text{ За теоремою Піфагора } KP_1 = 480 \text{ м} = PK_1.$$

З попереднього пункту відомо, що $PC = 1200 \text{ м}$, отже $K_1C = 720 \text{ м}$, і за теоремою Піфагора остаточно отримуємо: $KC = \sqrt{KK_1^2 + K_1C^2} \approx 733 \text{ м}.$

9 клас

Задача 9.1

Сила тяги F необхідна для подолання сил опору повітря при підтриманні літаком мінімальної польотної швидкості (приблизно рівній «швидкості звалювання», при якій втрачається достатня повітряна підйомна сила). Отже, в найгіршому випадку – продовженні польоту зі згаданою мінімальною швидкістю (при більших швидкостях кут напрямку глісади* до горизонту зменшиться, що збільшить відстань планування) сила опору повітря F_0 дорівнюватиме силі тяги F , яку створюватиме рівнодіюча сили тяжіння mg та підйомної сили F_n , направленої перпендикулярно до напрямку глісади, отже $F = mg \sin \alpha$. Звідси можна отримати чисельне значення для $\sin \alpha = 0,2$ і, порівнюючи його з кутом, необхідним для досягнення смуги аеродрому: $\sin \alpha = 1/4 = 0,25$, робимо висновок, що глісада, по якій може спланувати даний літак, дозволить йому досягти смуги аеродрому.



**глісада* – авіаційний термін, що означає траєкторію польоту літака при заході на посадку.

Задача 9.2

Згідно з показаною схемою повинно виконуватись: $U_1 = U_2 + U_3$ (1), $U_3 = U_4 + U_5$ (2). Підставляємо числові данні $5 < 4 + 2$ (1'), $2 = 1 + 1$ (2').

Очевидно, що рівність (1) не виконується. Отже, несправний вольтметр 1 або вольтметр 2, оскільки покази вольтметра 3 входять до обох рівнянь.

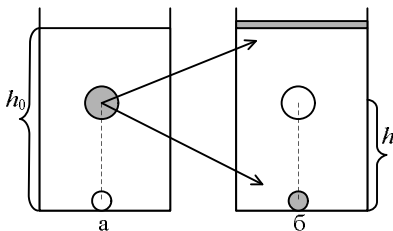
Для виявлення конкретного зіпсованого вольтметра скористаємось ще однією рівністю $I_2 = I_3 + I_4$. $\frac{U_2}{R} = \frac{U_3}{R} + \frac{U_4}{R}$, тобто $U_2 = U_3 + U_4$,

де R – опір вольтметра. Підставляємо: $4 > 2 + 1$.

Отже вольтметр 2 дає значення, які завищені на 1 В. Тобто $U_2 = 3$ В.

Задача 9.3

Головна діюча особа цього завдання – капля ртуті об'ємом $V = 2V_0$, яка у початковий момент перебуває на висоті $h = 3h_0/4$. А головне питання – куди вона подінеться, коли на це місце підніметься повітряна бульбашка?



Частина відповіді видно відразу: частина ртуті зайняло старе місце

бульбашки на дні. Але це тільки половина ртутної краплі. А куди перемістилася друга половина? Відповідь – на поверхню (*див. мал.*).

Визначимо повну механічну енергію системи $E = E_k + E_p$ у початковому і кінцевому станах. Початкова потенційна енергія системи була рівна $E_{p \text{ поч}} = \rho g 2V_0 h = \frac{3}{2} \rho g V_0 h_0$. Кінцева – $E_{p \text{ кін}} = \rho g V_0 \cdot 0 + \rho g V_0 h_0 = \rho g V_0 h_0$. Кінетична енергія рідини і на початку, і наприкінці дорівнює нулю. Тому $E_{\text{поч}} = \frac{3}{2} \rho g V_0 h_0$ й $E_{\text{кін}} = \rho g V_0 h_0$. Як видно, повна механічна енергія системи зменшилася – частина її перейшла в тепло. $Q = E_{\text{поч}} - E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \rho g V_0 h_0 = 0,102 \text{ Дж}$.

Задача 9.4

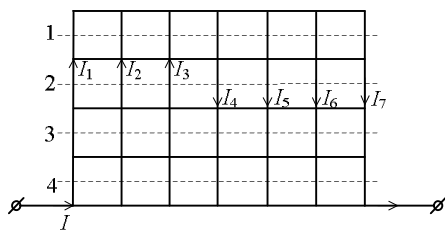
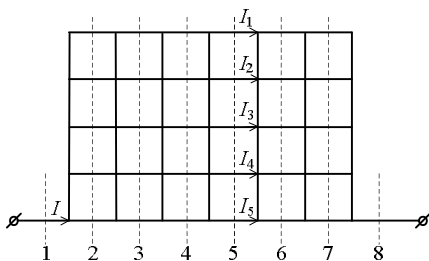
Розглянемо дію магнітного поля на горизонтальні дроти сітки. Сума горизонтальних струмів через дротики сітки у вертикальних перерізах 1 – 8 однакова (заряд на сітці ніде не накопичується) і дорівнює I . Тоді, суми сил Ампера на дротики сітки в одному (будь-якому) перерізі (наприклад перерізі 5) дорівнює $F_{\Sigma 5} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = I_1 Ba + I_2 Ba + I_3 Ba + I_4 Ba + I_5 Ba = (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) Ba = I Ba$.

Тоді, сума сил Ампера на всі горизонтальні дроти сітки (перерізи 2 – 7) дорівнює $F = F_{\Sigma 2} + F_{\Sigma 3} + F_{\Sigma 4} + F_{\Sigma 5} + F_{\Sigma 6} + F_{\Sigma 7} = 6 I Ba = 2,0 \text{ мН}$.

Розглянемо дію магнітного поля на вертикальні дроти сітки. Сума вертикальних струмів через дроти сітки у горизонтальних перерізах 1 – 4 сітки дорівнює нулю (заряд на сітці ніде не накопичується), це означає, що сума струмів вгору (I_1, I_2, I_3) дорівнює сумі струмів вниз (I_4, I_5, I_6, I_7). $I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6 + I_7$. Тоді, сума сил Ампера на дроти (у будь-якому перерізі), в яких струм напрямлений вгору $F_{\uparrow} = I_1 Ba + I_2 Ba + I_3 Ba$, вниз – $F_{\downarrow} = I_4 Ba + I_5 Ba + I_6 Ba + I_7 Ba$.

Ці сили рівні за модулем і протилежні за напрямом $\vec{F}_{\uparrow} + \vec{F}_{\downarrow} = 0$.

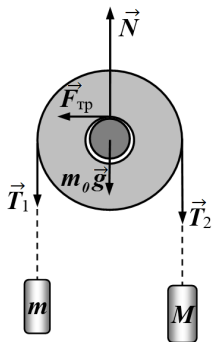
Сума сил на всі вертикальні дроти сітки дорівнює нулю.



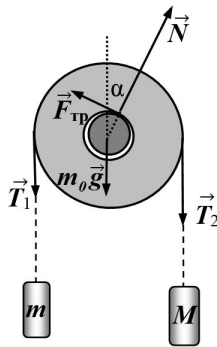
Задача 9.5

Щоб знайти швидкість за наведеним в умові графіком, спочатку треба знайти коефіцієнт тертя μ , який забезпечує рівномірний рух тягарців.

Блок під дією сил натягу нитки тисне на вісь. Сила тертя при цьому заважатиме йому проковзувати. За великого коефіцієнту тертя система може взагалі загальмувати і зупинитися.



мал. 1



мал. 2

Здається, що дотик між блоком і віссю має місце у верхніх точках осі і отвору блоку (див. мал. 1). Це невірно, що легко зрозуміти, спроектувавши сили, що діють на блок, на горизонтальну вісь. Сила тертя виявляється нічим не компенсована. Отже місце дотику блоку і осі зміститься вправо (див. мал. 2) і тоді рівнодіюча сили тертя F_{mp} і реакції опори N буде спрямована вгору і за теоремою Піфагора дорівнюватиме $\sqrt{N^2 + F_{tr}^2}$. Вниз на блок діють сили натягу нитки $T_1 = mg$, $T_2 = Mg$ і сила тяжіння $m_0 g$ (тягарці рухаються зі сталою швидкістю). Отже $\sqrt{N^2 + F_{tr}^2} = (m_0 + m + M)g$ (1).

Як для випадку статичної рівноваги, так і для руху зі сталою швидкістю, сума моментів сил на блок дорівнюватиме нулю. Відносно осі симетрії блоку (перетину N і $m_0 g$) маємо: $T_1 R + F_{tr} r - T_2 R = 0$ (2).

У випадку руху отримати рівняння (1) можна також з енергетичних міркувань, розглянувши зміну потенціальної енергії тягарців і роботу сили тертя.

Враховуючи $F_{tr} = \mu N$, перепишемо систему рівнянь (1) і (2):

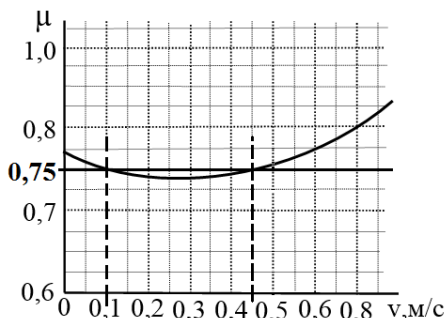
$$\begin{cases} N\sqrt{1+\mu^2} = (m_0 + m + M)g, \\ \mu N r = (M - m)gR. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо коефіцієнт тертя:

$$\mu = 1 / \sqrt{\frac{r^2}{R^2} \left(\frac{m_0 + m + M}{M - m} \right)^2} - 1 = \frac{3}{4} = 0,75. \text{ За графіком, коефіцієнту тертя}$$

$\mu = 0,75$ відповідають дві швидкості: 0,1 м/с і 0,45 м/с.

Проаналізуємо, що відбудеться, якщо швидкість трохи зменшиться. Якщо зменшиться швидкість 0,1 м/с, це, згідно з графіком, призведе до збільшення коефіцієнту тертя, що ще більше загальмує рух системи аж до повної її зупинки. Якщо зменшиться швидкість 0,45 м/с, це, згідно з графіком, призведе до зменшення коефіцієнту тертя, що спричинить до прискорення системи і повернення до попередньої швидкості. Якщо ж швидкість 0,45 м/с збільшиться, коефіцієнт тертя, згідно з графіком також збільшиться і рух системи загальмується до знову ж таки швидкості 0,45 м/с. Отже, встановиться швидкість 45 см/с руху внутрішньої поверхні блоку відносно осі.



Цій швидкості відповідає втричі ($R = 3r$) більша швидкість руху тягарців 1,35 м/с.

Зазначимо, що для того, аби така швидкість встановилася, на самому початку тягарці слід було розігнати так, щоб швидкість блоку відносно осі перевищувала $\approx 0,3$ м/с (мінімум графіку).

10 клас

Задача 10.1

У такій спрощеній системі робота може бути витрачена тільки на збільшення потенціальної енергії пружної деформації пружин.

Робота дорівнює зміні потенціальної енергії обох пружин. Для визначення мінімальної роботи, систему потрібно перевести у такий стан до якого б вона прийшла самостійно після з'єднання кінців пружин. Це стан, коли $F_{\text{пр1}} = F_{\text{пр2}}$, перша пружина стиснута на x_1 , а друга розтягнута на $(L - x_1)$.

$$F_{\text{пр1}} = F_{\text{пр2}} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 (L - x_1) \Rightarrow x_1 = \frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \quad (1)$$

$$A = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} \left(-x_1 + \frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 + \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)} \stackrel{(1)}{=} \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Задача 10.2

Розглянувши сили (див. мал. 1) що діють на невеличкий об'єм води в околі точки $A(x_0, y_0)$ на поверхні і надають доцентрове ($a_d = \omega^2 x_0$) прискорення ($mg \cdot \operatorname{tg} \beta = m\omega^2 x_0$), знаходимо тангенс кута нахилу дотичної: $\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2 x_0}{g}$ (1).

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2 x}{g} \Rightarrow y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Припустивши, що всі відбиті (див. мал. 2) від поверхні промені перетнуться в точці $F(0; F_y)$, одержимо: $y_0 = F_y + x_0 \cdot \operatorname{ctg}(\pi - 2\beta)$ (2).

Урахувавши, що $\operatorname{ctg}(\pi - 2\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)$, підставимо значення тангенса з (1) до рівняння (2):

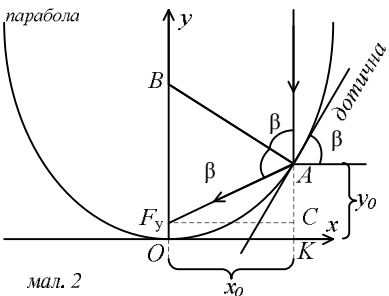
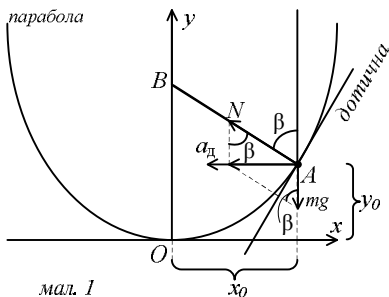
$$y_0 = F_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 x_0^2}{g} - \frac{g}{\omega^2} \right) \text{ або}$$

$$y_0 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 x_0^2}{g} = F_y - \frac{g}{2\omega^2}.$$

Щоб це співвідношення справджувалося для будь-якої точки поверхні, утвореної обертанням графіка функції $y(x)$ навколо осі Oy ,

функція повинна мати вигляд: $y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$, а наша поверхня має таку форму.

Відповідно, $F_y = \frac{g}{2\omega^2}$.



Задача 10.3

Припустимо, що на точку A подано додатний потенціал, а на точку B – від'ємний. Тоді струми через усі провідники, які перетинає пунктирна лінія, йтимуть зліва направо. Оскільки заряд на сітці ніде не накопичується, сума всіх цих струмів дорівнюватиме струму I , який входить з джерела у точку A і повертається до джерела з точки B . Отже, необхідно знайти струм через джерело. Для цього скористаємось принципом суперпозиції, тобто спочатку

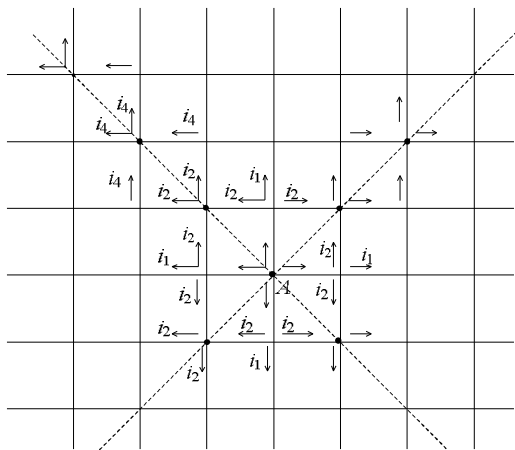
розглянемо тільки струми, які виходять з точки A і, внаслідок симетрії, порівну розходяться в усіх чотирьох напрямках. Тобто від A «навпростець» до B прямуватиме струм $I/4$. Тепер так само (незалежно від A) розглянемо струми, що входять з квадратної сітки у точку B . Аналогічно матимемо, що «навпростець» до B від A прямуватиме струм $I/4$. Нарешті, накладемо один розподіл струмів на інший. По провіднику між точками A і B йтиме струм $I/4 + I/4 = I/2$, що лише у два рази менше за струм через джерело. Отже, сума струмів через безліч усіх інших провідників, які перетинає пунктирна лінія, також дорівнюватиме $I/2$, або струму через один провідник AB . Все це добре демонструє стрімке зменшення величин струмів при віддаленні від точок A і B і правомірність формальної заміни великої сітки на нескінченно велику, а також нехтування її формою десь далеко на краях.

Скористаємося законом Ома і визначимо струм через провідник AB , на який подано напругу U : $I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{US}{\rho a}$. Загальний струм удвічі більший

$I = 2 \frac{US}{\rho a}$ і дає відповідь на перше питання.

Для того, щоб знайти відповідь на друге питання, тобто знайти ділянки дроту, через які струм не йде, знову скористуємось принципом суперпозиції. Тільки розглянемо розподіл струмів на більших відстанях від точок A і B . Як бачимо з малюнку, кожний із струмів $I/4$ ділиться на струм i_1 і два струми i_2 . Далі привертає увагу симетрія діагоналей (пунктирні лінії, що проходять через точку A). Внаслідок симетрії у вузлах на цих лініях входять і виходять однакові струми. У найближчому діагональному вузлі від точки A $i_2 + i_2 = i_2 + i_2$, у наступному – $i_4 + i_4 = i_4 + i_4$ і так далі. Аналогічну картину, тільки зі зворотними напрямками струмів, дає точка B . Накладемо один діагональний розподіл струмів на інший. Як бачимо з мал., в усіх паралельних AB ділянках, що розташовані вздовж діагональних напрямків, струми компенсуються.

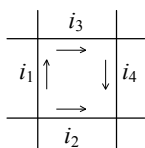
Нарешті, відповідь на третє питання задачі про магнітне поле у центрі будь-якого



квадрату сітки не потребує знання відповідей на перше і друге питання. Спочатку зрозуміємо, як залежить магнітне поле провідника зі струмом від величину струму. Струм у провіднику I створює певне магнітне поле. Але струм (потік заряджених частинок) I завжди можна уявити як n струмів величиною I/n кожний. Інакше, магнітне поле струму

I можна обчислити, як суму магнітних полів n струмів величиною I/n кожний. Це можливо, якщо магнітне поле пропорційне величині струму, $B \sim I$. Звичайно, воно ще залежить від відстані, але у нашому випадку (центр квадрата) відстані до сторін є однаковими. Як відомо, лінії магнітного поля прямолінійного провідника охоплюють його в напрямку, який задає рух свердлика. Отже, струм через сторону квадрата створює у його центрі перпендикулярне до площини квадрата магнітне поле.

Тепер розглянемо суму падінь напруги у будь-якому контурі сітки. Вона дорівнюватиме нулю, оскільки сітка не містить джерел струму. Оскільки опори сторін квадрата однакові, рівність нулю суми падінь напруги призведе до того, що сума струмів, які спрямовані за годинниковою стрілкою відносно центру квадрата, дорівнюватиме сумі струмів, які спрямовані проти годинникової стрілки. Це означає, що магнітні поля у центрі квадрата компенсуються. Більш наочно це ілюструє малюнок.



$i_1 R + i_3 R + i_4 R = i_2 R$, або $i_1 + i_3 + i_4 = i_2$. Струми i_1, i_3, i_4 створюють у центрі квадрата магнітні поля, спрямовані від нас. А струм i_2 створює поле, спрямоване до нас. Оскільки магнітне поле пропорційне до величини струму, поле струму $i_2 = i_1 + i_3 + i_4$ повністю компенсує поля трьох інших струмів.

Висновок про компенсацію магнітного поля може бути узагальнений на центр будь-якого правильного багатокутника, сторони якого мають однакові опори.

Задача 10.4

Блок під дією сили натягу нитки буде тиснути на вісь. Сила тертя при цьому заважатиме йому проковзувати. Якщо відношення мас тягарців $x = m/M$ близьке до одиниці, система може взагалі залишитися у стані спокою і прискорення дорівнюватиме нулю. Здається, що при цьому дотик між блоком і віссю має місце у верхніх точках осі і отвору блоку (див. мал.). Це невірно. Щоб у цьому переконатися, достатньо розглянути моменти сил відносно осі обертання, що проходить через ці точки. Моменти сили реакції опори N та сили тертя $F_{\text{тр}}$ дорівнюють нулю, а сили натягу нитки мають різні значення T_1 і T_2 , але однакові плечі. Отже, моменти некомпенсовані, статична рівновага неможлива, оскільки $T_2 > T_1$ місце дотику блоку і осі

зміститься вправо (див. мал.). Як для випадку статичної рівноваги, так і для руху з прискоренням, сума моментів сил на блок дорівнюватиме нулю. Під час руху це обумовлено невагомистю блока. Відносно горизонтальної осі симетрії блока маємо:

$$T_1 R + F_{\text{тр}} r - T_2 R = 0 \quad (1).$$

Для випадку руху з прискоренням у вірності рівняння (1) можна переконатися також з енергетичних міркувань, розглянувши роботу сил натягу і сили тертя. Спроекуємо тепер сили, що діють на блок, на горизонтальний та вертикальний напрями:

$$\text{OX: } N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha = 0,$$

$$\text{OY: } N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha = T_1 + T_2 \quad (2)$$

У випадку статичної рівноваги певного зв'язку між силою тертя та реакцією опори не існує, можна тільки стверджувати, що $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Отже, маємо три рівняння і три невідомі $F_{\text{тр}}$, N , α (сили натягу нитки $T_1 = mg$, $T_2 = Mg$). У випадку руху, $F_{\text{тр}} = \mu N$ (тут і далі вважатимемо, що максимальна сила тертя спокою дорівнює силі тертя ковзання), і з першого рівняння (2) відразу знаходимо кут: $\text{tg} \alpha = \mu$ ($\cos \alpha = 1/\sqrt{1+\mu^2} = 4/5$, $\sin \alpha = 3/5$). Але тепер з'являється інше невідоме – прискорення a .

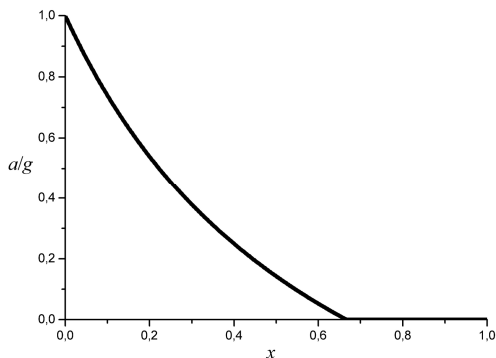
Запишемо для тягарців проекцію другого закону Ньютона на вертикальну вісь

$$\begin{cases} ma = T_1 - mg, \\ Ma = Mg - T_2. \end{cases} \quad (3)$$

і розв'яжемо систему (1), (2), (3) з урахуванням даних задачі.

$a = g \frac{2/3 - x}{2/3 + x}$	якщо $x \leq 2/3$
$a = 0$	якщо $x \geq 2/3$

Правильний графік функції $a = g \frac{2/3 - x}{2/3 + x}$ має наступний вигляд:



Задача 10.5

Площа перерізу вузького отвору фонтану $S = 1 \text{ см}^2$ досить невелика порівняно з площами перерізу посудин. Отже, інтуїтивно здається, що фонтан має працювати досить довго, а рівні води у посудинах змінюватись повільно. Повітря у посудинах 1 і 2 знаходиться під підвищеним тиском, який забезпечує вода, що перетікає з верхньої посудини у найнижчу. Нехтуючи швидкістю руху води у лівій трубці, знаходимо, що цей тиск повинен дорівнювати сумі атмосферного і гідростатичного: $P = P_A + \rho g(h_1 + h_2)$ (1). Повітря тиском $P = P_A + \rho g(h_1 + h_2)$ «видавлює» воду з посудини 2 у трубку, створюючи фонтан. Якби трубка була вищою (подумки збільшуємо h_3 до деякого H_3), то вода б перестала витікати, коли $P = P_A + \rho g(h_2 + H_3)$. Порівнюючи з (1), знаходимо, що за висоти $H_3 = h_1$ вода перестала б витікати. Саме на цю висоту підніматиметься вода у фонтані, тобто $h_3 + h = H_3 = h_1$, звідки $h = h_1 - h_3 = 2,5 \text{ м}$. Цей результат можна було отримати інакше – скориставшись рівнянням Бернуллі.

Визначимо тепер об'єм води, який за одиницю часу вилітає у вигляді фонтану. Оскільки ми знаємо $h = h_1 - h_3$, з рівняння Бернуллі $\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$ знайдемо швидкість води на виході з вузького отвору: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$. Об'єм води, що за одиницю часу проходить крізь вузький отвір, дорівнює $vS = \sqrt{2gh}S = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}S$. Саме на цю величину

зменшується об'єм води у посудині 2: $\frac{\Delta V_2}{\Delta t} = v_2 S_2 = \sqrt{2gh}S = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}S$,

Звідси знаходимо швидкість зменшення рівня води у посудині 2:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \frac{S}{S_2} = \sqrt{2g(h_1 - h_3)} \frac{S}{S_2} = 0,35 \text{ мм/с} \quad (2). \text{ Вода з посудини 2 попадає у}$$

посудину 3, але ж у той самий час якась кількість води витікає з посудини 3 у посудину 1, збільшуючи в останній рівень води. Розглянемо зміну води у посудині 3 за одиницю часу. Вважатимемо, що рівень води у посудині 3

$$\text{збільшується. Тоді } \frac{\Delta V_3}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} - \frac{\Delta V_1}{\Delta t} \text{ або } v_3 S_3 = v_2 S_2 - v_1 S_1 \quad (3). \text{ Необхідне}$$

ще одне рівняння для знаходження швидкостей v_1 і v_3 . Ми ще не розглянули повітряний зв'язок між посудинами 1 і 2. За рахунок зміни об'ємів води у цих посудинах, змінюється й об'єм повітря V в них:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} - \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_3}{\Delta t} = v_3 S_3.$$

За умовою процес ізотермічний. Отже $PV = (P + \Delta P)(V + \Delta V)$ (4), або $P\Delta V + \Delta PV + \Delta P\Delta V = 0$. Якщо Δt достатньо малий проміжок часу тоді $\Delta P\Delta V \ll P\Delta V + \Delta PV$ і ним можна знехтувати. З попередніх рівнянь $\Delta V = v_3 S_3 \Delta t$, а з рівняння (1) і малюнка $\Delta P = \rho g \Delta(h_1 + h_2) = \rho g(v_3 - v_1)\Delta t$. Підставляємо у (4) і, вважаючи проміжок часу Δt малим, отримуємо:

$$v_1 = v_3 \left(1 + \frac{PS_3}{\rho g V} \right) \quad (5). \text{ Як бачимо з рівняння (5), знаки швидкостей однакові.}$$

Виходить, що наше припущення, за яким рівень води у верхній посудині збільшується, вірне! Тепер розв'яжемо систему рівнянь (3) і (5).

$$v_1 = v_2 \frac{\left(1 + \frac{PS_3}{\rho g V} \right)}{\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_1}{S_2} \left(1 + \frac{PS_3}{\rho g V} \right)} \approx 0,214 \text{ мм/с}, \quad v_3 = \frac{v_2}{\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_1}{S_2} \left(1 + \frac{PS_3}{\rho g V} \right)} \approx 0,014 \text{ мм/с}.$$

11 клас

Задача 11.1

В обох випадках газу передається однакова кількість теплоти відповідно до закону Джоуля – Ленца, $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q$.

Але різні умови нагріву приводять до різних значень кінцевої температури $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ за рахунок різних теплоємностей газу в цих процесах

$\Delta Q = C_V \Delta T_1 = C_P \Delta T_2$. Відповідно відношення теплоємностей визначається відношенням різниць температур, отриманих у двох процесах нагрівання газу $\gamma = C_P / C_V = \Delta T_1 / \Delta T_2$.

При ізохоричному нагріванні ($V = \text{const}$) з рівняння $PV = \nu RT$ маємо: $\Delta T_1 = V(P_1 - P) / \nu R$.

При ізобаричному нагріванні ($P = \text{const}$) з рівняння $PV = \nu RT$ маємо: $\Delta T_2 = P(V_2 - V) / \nu R$.

Остаточню отримуємо $\gamma = C_P / C_V = \Delta T_1 / \Delta T_2 = V(P_1 - P) / P(V_2 - V)$.

Задача 11.2

Розглянемо спершу рух окремої зарядженої частинки. Нехай магнітне поле спрямоване вздовж осі z , електричне – вздовж осі x .

Нехай початкова швидкість зарядженої частинки спрямована довільно, її проекція на напрямок магнітного поля – $v_{\parallel}$, перпендикулярна до поля компонента – $v_{\perp}$. За відсутності електричного поля рух частинки складатиметься з рівномірного руху вздовж магнітного поля зі швидкістю $v_{\parallel}$ і циклотронного обертання в площині xOy з частотою $\omega_c = eB / m$ по колу ларморівського радіусу $R_L = mv_{\perp} / eB$.

Наявність електричного поля приведе до того, що в протилежних (у напрямку x) точках орбіти швидкість зарядженої частинки відрізнятиметься на величину $2\Delta v = (eE / m)(\pi / \omega_c) = \pi E / B$. Якщо прийняти, що точка $x = 0$ суміщена з центром орбіти, то можна спрощено вважати, що половини орбіти, які відповідають додатнім і від'ємним x , частинка пролітає зі швидкостями $v_{\perp} + \Delta v$ та $v_{\perp} - \Delta v$. В результаті орбіта не замикається і з'являється середня швидкість у напрямку y :

$$v_{\text{др}} = \frac{\omega_c}{2\pi} 2[R_L(v_{\perp} + \Delta v) - R_L(v_{\perp} - \Delta v)] = \frac{eB}{\pi m} \frac{m}{eB} \frac{\pi E}{B} = \frac{E}{B}.$$

Видно, що ця швидкість – швидкість дрейфу в схрещених полях – не залежить ні від швидкості, ні від маси, ні від заряду частинки. Отже, електрони та позитивні іони дрейфуватимуть з однаковою швидкістю. Значить, плазма рухатиметься як ціле з дрейфовою швидкістю $v_{\text{др}} = E / B$.

Задача 11.3

Позначимо радіус орбіти r , маси Землі та супутника відповідно M і m .

Тоді початкова швидкість супутника $v_0 = \sqrt{G \frac{M}{r}}$. (1)

Якщо ж збільшити цю швидкість у $\sqrt{2}$ разів, то супутник подолає тяжіння Землі та віддалиться від неї на необмежену відстань.

Витрата пального під час кожного вмикання двигуна прямо пропорційна імпульсу, який отримує супутник, тобто модулю зміни швидкості δ .

Можна запропонувати два способи зміни орбіти.

1) Треба увімкнути двигун один раз над полюсом, щоб «повернути» швидкість на кут α . На рисунку показано відповідний рівнобедрений трикутник (зазначено модулі швидкостей), з якого отримуємо $\delta_1 = 2v_0 \sin \frac{\alpha}{2}$.

2) Треба спочатку над одним полюсом (у точці А, *див. мал.*) надати супутнику додаткової швидкості u , щоб перевести його на витягнуту еліптичну орбіту; тоді над іншим полюсом (у точці В) швидкість v_1 супутника буде меншою і її легше буде «повернути» на кут α . Після половини оберту новою еліптичною траєкторією треба зменшити швидкість супутника знов-таки на u , щоб орбіта стала коловою. Таким чином, витрата пального буде пропорційна на зміні швидкості $\delta_2 = 2u + 2v_1 \sin \frac{\alpha}{2}$.

Щоб виразити v_1 через u , скористаємося законами збереження енергії та моменту імпульсу:

$$-G \frac{Mm}{r} + \frac{m(v_0 + u)^2}{2} = -G \frac{Mm}{R} + \frac{mv_1^2}{2}, \quad m(v_0 + u)r = mv_1 R.$$

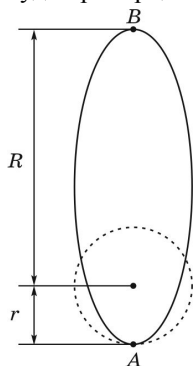
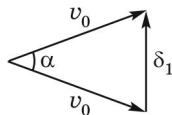
Із цих співвідношень, урахувавши формулу (1), отримуємо квадратне рівняння відносно v_1 :

$$v_1^2 - 2 \frac{v_0^2}{v_0 + u} v_1 + v_0^2 - u^2 - 2uv_0 = 0.$$

Формула для коренів квадратного рівняння нам не потрібна: два його корені відповідають *максимальному* та *мінімальному* значенням швидкості супутника на еліптичній орбіті. Отже, один із коренів має дорівнювати $v_0 + u$ (це легко перевірити), а другий, тобто v_1 , знайдемо з теореми Вієта:

$$v_1 = \frac{v_0^2 - u^2 - 2uv_0}{v_0 + u}. \quad \text{Таким чином, } \delta_2 = 2u + 2 \frac{v_0^2 - u^2 - 2uv_0}{v_0 + u} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Очевидно, досить розглядати значення u в інтервалі $(0; (\sqrt{2} - 1)v_0)$. Якщо $u \rightarrow 0$, отримуємо $\delta_2 \rightarrow \delta_1$. Якщо $u \rightarrow (\sqrt{2} - 1)v_0$ (швидкість $v_0 + u$ — це аналог другої космічної швидкості для даної орбіти), другий доданок у формулі (2) прямує до нуля (поворот площини орбіти відбуватиметься май-



же за нульової швидкості). Цей варіант вигідніший за варіант 1, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} > \sqrt{2} - 1$ (тобто якщо $\alpha > 49^\circ$). Проте час такого руху прямує до нескінченності.

Дослідження залежності $\delta_2(u)$ можна провести, наприклад, визначивши відповідну похідну. Це дослідження показує, що за умови $\frac{1}{3} < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$ (тобто $39^\circ < \alpha < 60^\circ$) функція $\delta_2(u)$ має мінімум всередині інтервалу

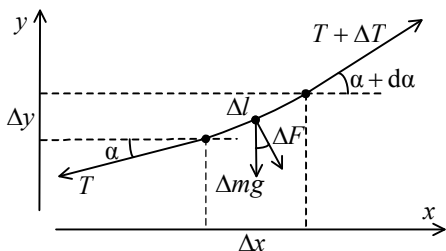
$$\left(0; (\sqrt{2} - 1)v_0\right) \text{ при } u_{\min} = v_0 \left(\sqrt{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}} - 1 \right). \text{ Якщо } \alpha = \alpha_2 = 45^\circ, \text{ отримуємо}$$

$$u_{\min} = 0,11v_0 \text{ і } \delta_2 = 0,75v_0.$$

Відповідь. 1) Слід увімкнути двигун один раз над полюсом, змінивши напрям швидкості на 15° . 2) Слід увімкнути двигун над полюсом, збільшивши швидкість супутника на 11 %, над іншим полюсом змінити напрям швидкості на 45° і ще через половину оберту зменшити швидкість до початкового значення. 3) Слід увімкнути двигун над полюсом, збільшивши швидкість супутника трохи менше ніж на 41 %, над іншим полюсом змінити напрям швидкості на 90° і ще через половину оберту зменшити швидкість до початкового значення.

Задача 11.4

Оскільки за умовою ланок у ланцюжку дуже багато, розглянемо ланцюжок у вигляді дуги кривої. Спроекуємо сили, що діють на маленький фрагмент ланцюжка довжиною Δl , на горизонтальний і вертикальний напрямки (Δl має горизонтальну і вертикальну проекції $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$ і $\Delta y = \Delta l \sin \alpha$, див. мал.).



Почнемо з сили тяжіння. Горизонтальна проекція дорівнює нулю, а вертикальна $\Delta mg = \tau g \Delta l$, де $\tau = m/l$ лінійна густина ланцюжка. Отже, сума всіх вертикальних складових дасть спрямовану вниз силу $\sum \Delta mg = \tau g \sum \Delta l = \tau g l = mg$.

Розглянемо тепер проекції сили Ампера $\Delta F = IB \Delta l$. Горизонтальна проек-

ція: $\Delta F_x = IB\Delta l \sin \alpha = IB\Delta y$. Вертикальна проекція:

$$\Delta F_y = -IB\Delta l \cos \alpha = -IB\Delta x.$$

Горизонтальна складова сили Ампера, що діє на весь ланцюжок:

$$F_x = \sum \Delta F_x = IB \sum \Delta y = IBh \quad (1).$$

Проекція сили Ампера на вертикальний напрямок дає $F_y = \sum \Delta F_y = -IB \sum \Delta x = -IBS \quad (2)$.

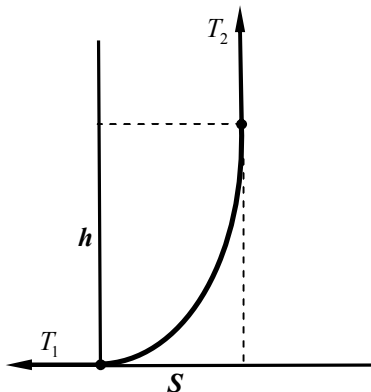
Отже, у нашому випадку для всього ланцюжка (див. мал.) маємо:

$$\begin{cases} T_1 = IBh, \\ T_2 = IBS + mg. \end{cases} \quad (3)$$

Ми ще не використали задану в умові довжину ланцюжка l . Найпростіше це зробити або за допомогою аналізу роботи сил натягу при невеликому уявному зміщенні на Δl ланцюжка вздовж його довжини ($(T_2 - T_1)\Delta l = \Delta mgh$), або, спроектувавши сили, що діють на маленький фрагмент ланцюжка (див. мал. 1), на його напрям: $\Delta T = \Delta mg \sin \alpha = \tau g \Delta l \sin \alpha = \tau g \Delta y$.

$$\text{Тоді } T_2 - T_1 = \sum \Delta T = \tau g \sum \Delta y = \tau gh = mgh/l \quad (4).$$

Отже, ми отримали три рівняння (система (3) і (4)). Необхідно знайти відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на ланку ланцюжка, тобто безрозмірну величину $a = \frac{IB\Delta l}{\Delta mg} = \frac{IB}{\tau g}$. Запишемо всі отримані рівнян-



$$\begin{cases} t_1 = a \frac{h}{l}, \\ t_2 = a \frac{S}{l} + 1, \\ t_2 - t_1 = \frac{h}{l} \end{cases} \quad (5) \quad \text{і}$$

знайдемо $a = \frac{l-h}{h-S}$. Сила Ампера, що діє на весь ланцюжок, дорівнює

$$F_A = IB\sqrt{h^2 + S^2}.$$

$$\text{Відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на весь ланцюжок в цілому: } \frac{F_A}{mg} = \frac{IB\sqrt{h^2 + S^2}}{\tau gl} = a \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{l} = \frac{l-h}{h-S} \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{l}.$$

Задача 11.5

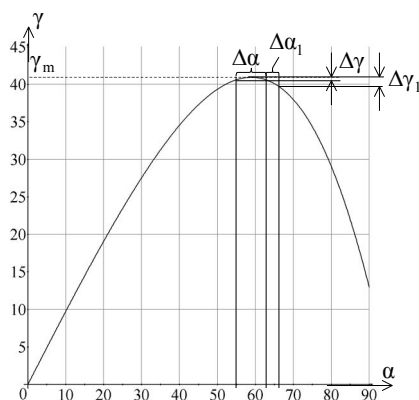
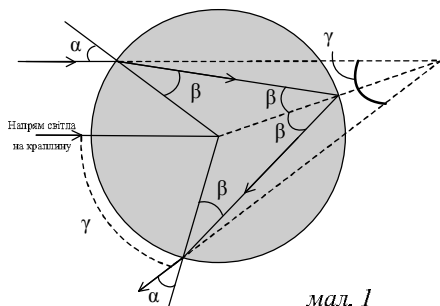
Знайдемо коефіцієнти a і b із системи двох рівнянь для фіолетового і червоного променів:
$$\begin{cases} n_\phi = a + b/\lambda_\phi^2, \\ n_\gamma = a + b/\lambda_\gamma^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,320008 \approx 1,32 \\ b = 3192,782 \text{ нм}^2 \approx 3200 \text{ нм}^2 \end{cases} \quad (1)$$

Розглянемо хід променя, що один раз відбивається в середині, через краплю води (дощу) (див. мал. 1). За малюнком $\gamma = 4\beta - 2\alpha$ (γ – кут, під яким світло йде назад після одноразового відбивання в краплі), де кут β можна виразити із закону заломлення світла
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n : \beta = \arcsin(\sin \alpha / n).$$

Отже кут γ залежить від кута падіння променя α :

$$\gamma = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) - 2\alpha \quad (2).$$

Якщо дослідити цю функцію в інтервалі $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, можна зауважити, що вона є монотонною. При $\alpha = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$, при $\alpha = 60^\circ, \gamma = 43,1^\circ$, при $\alpha = 90^\circ, \gamma = 16^\circ$ (для червоного світла $n = 1,326$), тобто в інтервалі $0^\circ - 90^\circ$ ця функція має максимум (див. мал. 2). Визначимо максимальне значення γ_m .



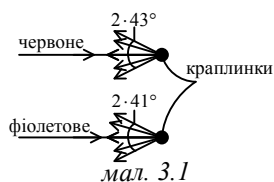
мал. 2

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \alpha_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \Rightarrow \gamma_m = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right) - 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right). \quad (3)$$

Для червоного світла $\gamma_{\text{мч}} = 43^\circ$, для фіолетового $\gamma_{\text{мф}} = 41^\circ$.

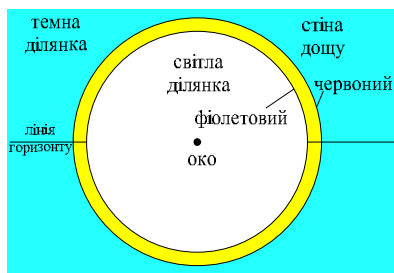
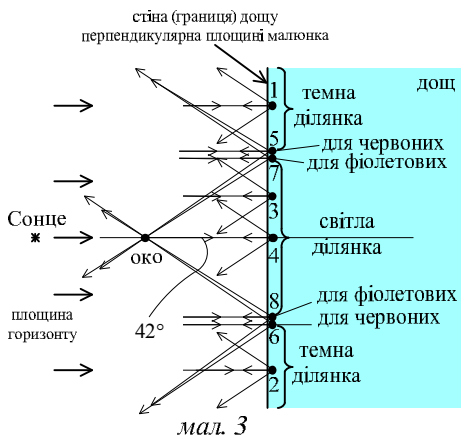
Отримані результати означають, що паралельний пучок світла, який йде від Сонця на краплину, після одноразового відбивання в краплині повертається назад у вигляді світлового конуса (вершина на краплині) з кутом $\gamma_{\text{м}}$. (див. мал. 3.1)



Для червоного світла конус має кут 43° , а для фіолетового – 41° .

Розглянемо процес виникнення веселки.

Найчастіше ми бачимо веселку після того, як пройшов дощ, тобто область дощу віддалилась від нас, і ми бачимо його з боку, у вигляді стіни дощу, а Сонце знаходиться в нас за спиною і його промені падають на стіну дощу під кутом меншим ніж 42° . На мал. 3 зображено випадок, коли сонячні промені падають на стіну дощу перпендикулярно до неї і паралельно до площини горизонту (на ній знаходиться спостерігач(око)). Лінія Сонце – око лежить в площині горизонту і перпендикулярна стіні дощу. Сонце за спиною спостерігача. Веселку ми бачимо на цій стіні дощу. На мал. 3 показано хід світлових променів після одноразового відбивання в краплинках, що знаходяться на лінії горизонту. Від краплин 1 і 2 (точки за межами дуги первинної райдуги) світло в око спостерігача не потрапляє (око за межами світлового конуса), ця область стіни дощу здається темною. Від краплин 3 і 4 (точки всередині райдуги) ми бачимо світло (око в межах світлового конуса), ця область стіни дощу відносно світла. Від краплин 5 і 6 в око потрапляє тільки червоне світло (око знаходиться за межами світлового конуса для фіолетового світла і для інших кольорів), їх ми бачимо яскраво-червоними, за рахунок “згущення” цих променів в області γ близькій до $\gamma_{\text{м}}$ (падає дос-



мал. 4

татньо широкий пучок світла на область $\Delta\alpha_1$, а виходить дуже вузький пучок $\Delta\gamma$ (див. мал. 2)). Червоні краплини ми бачимо під кутом 43° . Від краплин 7 і 8 ми бачимо досить яскраве (за рахунок згущення цих променів) фіолетове світло, хоча в око потрапляють і інші кольори, але вони розріджені (для них область $\Delta\alpha_1$ менша за $\Delta\gamma_1$). Фіолетові краплини ми бачимо під кутом 41° . Між краплинами 5 і 7, 6 і 8 спостерігаються краплини всіх інших кольорів веселки. Якщо вибрати іншу площину дослідження (вона має бути перпендикулярна площині дощу і співпадати з напрямком Сонце – око), ми будемо спостерігати ту саму картину. Загальна картина зображена на мал. 4.

У вторинній веселці промінь двічі відбивається всередині краплі від її поверхні (див. мал. 5).

3 малюнка $\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6\beta$, або

$$\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) \quad (4).$$

Функція (4), так само як і (2), монотонна, але на відміну від (2) вона, в інтервалі $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, має мінімуми γ , а не максимуми, як у первинної веселки.

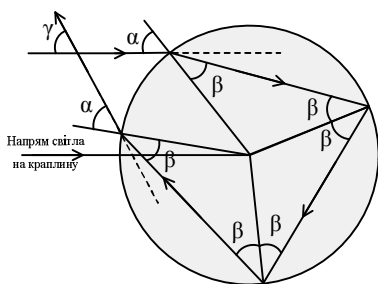
$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 2 - \frac{6}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} = 0 \Rightarrow \sin \alpha_{\min} = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}.$$

$$\text{Для вторинної веселки } \gamma_{\min} = 180^\circ + 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}\right) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}\right).$$

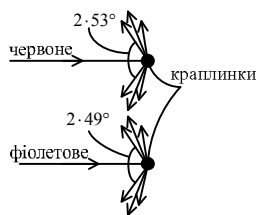
Для червоного світла $\gamma_{\min} = 49^\circ$, для фіолетового $\gamma_{\min} = 53^\circ$.

Отримані результати означають, що паралельний пучок світла, який йде від Сонця на краплину, після дворазового відбивання в краплині розходить у різні сторони утворюючи темний конус (вершина на краплині), в який світло не потрапляє (див. мал. 6).

3 кольорами вторинної веселки спробуйте розібратись самостійно – подібно до мал. 3. Загальна картина веселки на мал. 7. Таку колову картину можна спостерігати з літака або з гелікоптера.



мал. 5

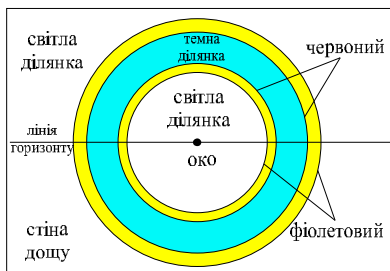


мал. 6

Червоні кольори обох веселок найближчі один до одного (43° і 49°). Смути інфрачервоного випромінювання будуть ще ближчі. Однак, згідно з формулою Коші $n = a + b/\lambda^2$, показник заломлення обмежений знизу. Навіть при $\lambda \rightarrow \infty$ (що взагалі достатньо безглуздо внаслідок дифракції світла на краплях води) коефіцієнт заломлення має кінцеву межу $n = a = 1,32$. Розра-

хуємо для $n = 1,32$ кути γ у первинній та вторинній райдугах: $\gamma_1 \approx 44,01^\circ \approx 44^\circ$, $\gamma_2 \approx 47,42^\circ$. Як бачимо, $\gamma_2 > \gamma_1$. Отже, злиття першої і другої райдуг не відбувається ні в якому діапазоні.

Щоправда, зазначимо, що для вичерпної відповіді слід врахувати залежність показника заломлення від температури і користуватися точною формулою замість наближеної. Все це за певних умов може ще зблизити значення γ_1 і γ_2 .



мал. 7

**РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРУ (запропонованих журі)**

8 КЛАС

Задача 1

Перший спосіб

1. Визначаємо положення центру тяжіння лінійки.
2. Вирізаємо з фігури прямокутник відомої площі.
3. Виготовляємо з лінійки та олівця важіль, на якому врівноважуємо прямокутник та фігуру з вирізом.
4. Застосовуємо правило моментів

$$\Delta m g d_1 = (m_{\text{фір}} - \Delta m) g d_2 \Rightarrow m_{\text{фір}} = \Delta m \left(\frac{d_1}{d_2} + 1 \right) \Rightarrow S_{\text{фір}} = \Delta S \left(\frac{d_1}{d_2} + 1 \right), \quad \text{де:}$$

Δm і ΔS – маса та площа вирізаного прямокутника; d_1 та d_2 – плечі важеля для прямокутника та фігури з вирізом відповідно.

5. Розраховуємо площу фігури $S_{\text{фір}}$.

Другий спосіб

1. Визначаємо положення центру тяжіння лінійки.
2. Вимірюємо діаметр мідного дроту, намотуючи його на олівець чи лінійку, методом рядів.
3. Ділимо дріт на дві частини, які надалі використовуємо так: короткий буде гачком для підвішування цілої фігури, довгий – важком відомої маси.

Тоді маси шматків знаходимо за формулою $m = \rho l \frac{\pi d^2}{4}$.

4. Врівноважуємо фігуру та довгий шматок дроту на важелі; застосовуючи правило моментів, знаходимо масу фігури.
5. Використовуючи ножиці, вирізаємо квадратики певної площі. Робимо з них стовпчик певної висоти та визначаємо товщину фігури методом рядів. Зважуючи цей стовпчик (як і в п. 4.), знаходимо його масу, що дозволяє розрахувати густину матеріалу фігури $\rho_{\text{фір}}$.
6. Знаючи масу фігури (п. 4), її товщину h та густину (п. 5), розраховуємо її

площу:
$$S_{\text{фір}} = \frac{m_{\text{фір}}}{\rho_{\text{фір}} h}.$$

Задача 2

Див. 9 клас, задача 2.

Оскільки вага пляшки з водою більша за межі вимірювання динамометра (4 Н), для її визначення треба підвісити пляшку на нитці, складеній навпіл та пропущеній крізь кільце, що закріплене на пляшці. Вимірюємо вагу

пляшки P , піднімаючи та опускаючи пляшку за допомогою динамометра. Піднімати та опускати треба для того, щоб під час вимірювання ваги виключити вплив сили тертя. Отже, тоді вага пляшки дорівнює середньому арифметичному двох значень сили, що показує динамометр під час підйому та опускання $P = \frac{P_1 + P_2}{2} = 5 \text{ Н}$.

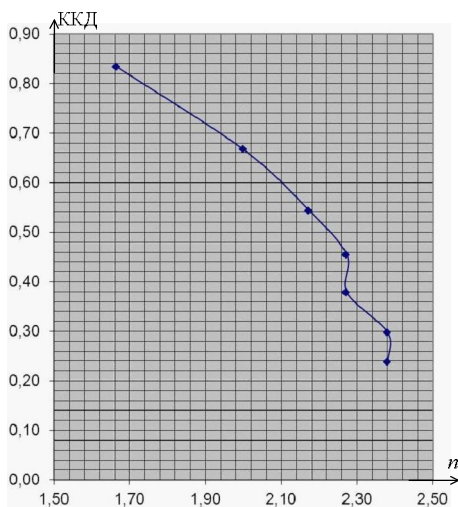
Беремо невелику частину нитки та прив'яжемо два кільця до пляшки. Один кінець нитки, що залишилася, прив'яжемо до стержня лапки, а другий пропускаємо крізь одно з кілець. Таким чином ми отримуємо модель рухомого блока. Якщо тепер перекинути вільний кінець нитки через стержень, а потім крізь друге кільце, ми отримуємо модель поліспасти – приладу, що складається з нерухомих та рухомих блоків та слугує для отримання багатократного виграшу в силі. Тягнемо рівномірно за нитку вертикально вгору, динамометром вимірюємо силу F .

Визначаємо виграш у силі $n = \frac{P}{F}$ та ККД $\eta = \frac{P}{kF}$, де k – кількість ниток,

здіяаних у моделі поліспасти. Повторюємо вимірювання, збільшуючи кількість витків нитки, пропущеної крізь кільця, результати заносимо до таблиці. Будуємо графік залежності ККД від виграшу в силі.

З графіку видно: що збільшення числа ниток веде до зменшення ККД нашого поліспасти. Це зумовлено зростанням кількості взаємодіючих поверхонь, які труться одна об одну. Водночас зі зростанням кількості ниток, виграш у силі прямує до деякого граничного значення (2,38). Отже, для створення ефективного підйомника доцільно використати поліспаст з 3 – 5 нитками. За таких умов ККД підйомника буде лежати в межах 0,67 – 0,45, а виграш в силі буде від 2,0 до 2,27.

$P, \text{Н}$	5	5	5	5	5	5	5
$F, \text{Н}$	3	2,5	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1
n	1,67	2,00	2,17	2,27	2,27	2,38	2,38
k	2	3	4	5	6	8	10
ККД	0,83	0,67	0,54	0,45	0,38	0,30	0,24

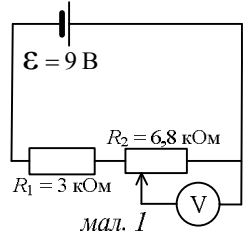


9 КЛАС

Задача 1

Електрична схема (див. мал. 1) з'єднання елементів для визначення режимів роботи вольтметра:

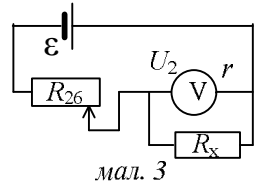
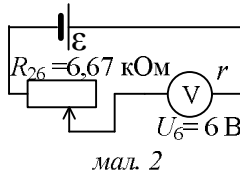
1. Вимірюються мінімальна $U_0 = 0$ В і максимальна $U_1 = 5,4$ В (5,2 В – пізніше, після часткового розряду батареї) напруги на потенціометрі R_2 при крайніх положеннях повзунка потенціометра.



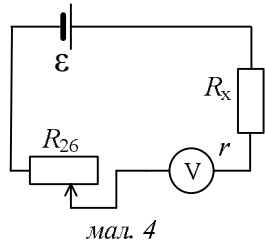
2. З рівнянь $\mathcal{E} = I \cdot \frac{R_2 \cdot r}{R_2 + r} + I \cdot R_1$ та $\mathcal{E} - U_1 = I \cdot R_1$ із двома невідомими I

(струм, що протікає в колі) та r визначається внутрішній опір вольтметра $r \approx 13,3$ кОм.

3. Вимірювання вольтметром напруги U_2 при паралельному підключенні до вольтметра (див. мал. 3) додатково невідомого опору R_x дає значення $U_2 = 3$ В (при цьому опір R_2 встановлений відповідно до максимальної напруги на вольтметрі (див. мал. 2)). Звідси величина (наближене значення) невідомого опору $R_x \approx 4,44$ кОм.



4. Покази вольтметра $U_3 = 4,25$ В відповідати-муть (див. мал. 4) послідовному з'єднанню R_x з вольтметром (при тому самому положенні повзунка потенціометра). По цій схемі може бути побудована шкала омметра, обернена до шкали вольтметра, оскільки значенню $R_x = 0$ відповідає максимальне значення напруги на вольтметрі (може бути встановлено будь-яким у межах від 0 до 6 В зменшенням опору R_1 та регулюванням R_2), а значенню $R_x = \infty$ відповідатиме нульова напруга на вольтметрі.



5. Аналітична залежність напруги вольтметра від додатково підключеного (вимірюваного) опору R_x (див. мал. 4): $U = \frac{\mathcal{E} \cdot r}{r + R_x + R_{26}}$.

6. Шкала омметра будується (див. мал. 3) при послідовному з'єднанні вольтметра з потенціометром і паралельному з невідомим опором (який ви-

значається омметром) відповідно до формули: $U = \frac{6R_x}{4,44 + R_x}$.

Задача 2

Див. 8 клас, задача 2.

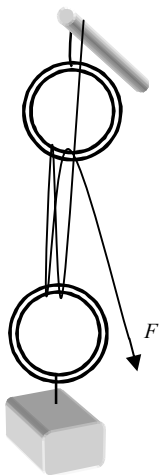
Вказівки до розв'язку

Побудова пристрою повинна враховувати:

- фіксовану вагу вантажу;
- декілька різних значень виграшу у силі;
- незмінність сили при вимірюванні;
- оптимальність конструкції.

Основою для приладу є виконання «золотого» правила механіки – вигравучи у силі, ми програємо у відстані. Але обов'язковим є розуміння того, що будь-який пристрій може давати виграш чи програш у силі, але не у роботі. При нехтуванні тертям, можна вважати досягнення майже стовідсоткового коефіцієнту корисної дії. Але реальні системи завжди мають програвати у здійсненні роботи. Причиною цього є втрати енергії на подолання тертя та опір середовища.

Нехай приладом, який ми вирішили побудувати, є дещо подібне до поліспаду (див. мал.). Тоді виграш у силі повинен бути більшим у стільки разів, у скільки разів більшим буде переміщення кінця нитки порівняно з підйомом тіла. Однак експериментальні результати дають величину значно меншу, оскільки частина роботи йде на подолання тертя. З результатів отриманих при збільшенні кількості перекинутих частин нитки можна зробити висновок, що ККД зменшується, тому що все більша частина виконаної роботи йде на подолання тертя. Саме ці закономірності повинен продемонструвати побудований графік.



10 КЛАС

Задача 1

Масу води зручно визначати за її об'ємом, за допомогою шприца, враховуючи відому густину води 1000 кг/м^3 . 1 см^3 відповідає 1 г .

Для визначення маси дроту використовуємо саморобні ваги, виготовлені з лінійки і круглого олівця. Дріт, зігнутий у формі літери П, підвішуємо на лінійку по один бік від олівця, а монету – кладемо по інший.

В залежності від співвідношення мас дроту і монети, зручно більш легкий предмет розмістити біля самого кінця лінійки, а більш важкий переміс-

тити ближче до точки обертання. При цьому, центр мас самої лінійки, визначений попередньо, залишається на олівці, і масу і вагу лінійки можна не враховувати.

Знаючи масу монети m_m і відстані від центру мас монети x_m і від точки підвішування дроту, x_d , до точки обертання лінійки, визначаємо масу дроту:

$$M_d = m_m \frac{x_m}{x_d}. \text{ Якщо поділити масу усього дроту } M_d \text{ на його довжину } L,$$

$$\text{отримаємо погонну густину дроту } \tau = \frac{M_d}{L}.$$

За нашими даними, отримали $\tau = 0,22 \text{ г/см}$

Надалі, масу частин дроту m_d можна визначати за їх довжинами l : $m_d = \tau \cdot l$.

1. Спочатку зробимо калориметр і визначимо його теплоємність.

У пластикову одноразову склянку відміряємо гарячу воду, приблизно біля 100 мл. Вимірюємо її температуру. Для прикладу, 50°C . Кімнатна температура 20°C . Пластиковий калориметр повністю занурюємо у пластикову склянку з гарячою водою. Через невеликий проміжок часу вимірюємо температуру води.

Складаємо рівняння теплового балансу: $Q_B + Q_K + Q_{\text{терм}} = 0$, де Q_B – кількість теплоти, яка виділяється при охолодженні гарячої води, Q_K – кількість теплоти, яку отримує пластиковий калориметр, $Q_{\text{терм}}$ – кількість теплоти, яку віддає термометр. Питома теплоємність: $c_k = \frac{(c_B \cdot m_B + C) \cdot \Delta t_1}{m_k \cdot \Delta t_2}$.

За нашими даними, $c_k = 2070 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

При масі калориметра 15,5 г теплоємність $C_k = 32 \text{ Дж/К}$

2. Знаходимо питому теплоємність сплаву дроту.

Увесь дріт, маса якого M_d вже визначена, згортаємо у спіраль і поміщаємо у калориметр.

Пластикову посудину вставимо у одноразову пластикову склянку, на дно якої, попередньо, укладаємо згорнуту у кілька разів серветку, для кращої теплоізоляції дна. Стінки теплоізолюються повітряним зазором.

У калориметр наллємо певну масу холодної води m_1 . Масу води відміряємо за її об'ємом, за допомогою шприца, враховуючи відому густину води 1000 кг/м^3 . Температуру холодної води t_1 вимірюємо термометром.

Вимірюємо температуру гарячої води t_2 безпосередньо у чайнику, або відливаючи достатньо велику її кількість (щоб швидко не охолонула) у допоміжну склянку. Термометр після вимірювання занурюємо у холодну воду в ємності, з якої брали холодну воду (не в калориметрі).

Доливаємо у калориметр гарячу воду, відомої температури, у кількості, приблизно однаковій з кількістю холодної води. Вставляємо термометр,

охолоджений до температури холодної води t_1 . Спостерігаємо за показами термометра і визначаємо температуру суміші θ .

За допомогою шприца, вимірюємо загальний об'єм води у калориметрі і визначаємо об'єм і масу m_2 долитої гарячої води.

Але тепер у рівняння теплового балансу увійде і кількість теплоти, отримана дротом: $Q_d = c_d m_d (\theta - t_1)$.

Рівняння теплового балансу: $Q_1 + Q_k + Q_d + Q_t + Q_2 = 0$

або: $cm_2(\theta - t_2) + cm_1(\theta - t_1) + C_k(\theta - t_1) + c_d m_d(\theta - t_1) + C_t(\theta - t_1) = 0$.

$$\text{Знаходимо } c_d: c_d = \frac{cm_2(\theta - t_2) + cm_1(\theta - t_1) + C_k(\theta - t_1) + C_t(\theta - t_1)}{m_d(\theta - t_1)}.$$

За нашими даними, $c_d = 180 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

3. Знаходимо питому теплоту плавлення сплаву дроту.

У калориметр наливаємо певну кількість m_1 води.

Дріт складаємо у 8 разів (або 6), злегка скручуємо і затискаємо верхній кінець цієї скрутки у лапку штатива. Під дротом ставимо калориметр. Сірниками нагріваємо дріт. Краплі металу падають у воду і віддають їй свою теплоту.

Ця, остання, теплота має дві складових: $Q_{d1} = m_m \cdot \lambda$ – виділяється при твердінні розплаву, $Q_{d2} = c_d \cdot m_m (\theta - t_{\text{пл}})$ – виділяється при остиганні розплаву від температури плавлення, до температури суміші

Розплавивши дріт майже до кінця, вимірюємо температуру “суміші” θ .

Визначивши сумарну довжину залишків дроту $l_{\text{зал}}$ і знаючи його початкову масу M_d , визначаємо масу розплавленого металу, що попав у калориметр: $m_m = M_d - \rho l_{\text{зал}}$.

Рівняння теплового балансу: $Q_1 + Q_k + Q_t + Q_{d1} + Q_{d2} = 0$

або: $cm_1(\theta - t_1) + C_k(\theta - t_1) + c_d m_m(\theta - t_{\text{пл}}) + m_m \lambda + C_t(\theta - t_1) = 0$.

$$\text{Знаходимо } \lambda: \lambda = \frac{cm_1(\theta - t_1) + C_k(\theta - t_1) + c_d m_m(\theta - t_{\text{пл}}) + C_t(\theta - t_1)}{m_m},$$

$\lambda = 53 \text{ кДж/кг}$

Аналіз точності результатів.

Основним джерелом похибок у даній роботі є теплові вимірювання.

На результати впливають неконтрольовані витрати тепла у оточуюче середовище. Саморобний калориметр, навіть із додатковою ізоляцією, є далеко не ідеальним.

Суттєвий внесок у похибку роблять і самі вимірювання температури. Ціна поділки термометра становить 1 градус. При зміні температури від t_1 до θ на 10 градусів, два вимірювання з абсолютною похибкою 0,5 градуси вже

дають відносну похибку 10 %. Ще приблизно стільки же вносить і друга температура.

Вимірювання маси води шляхом визначення її об'єму пов'язане з точністю шкали шприца. Ціна поділки $0,1 \text{ см}^3$, при масі води 30 г, дає відносну похибку близько 1,5 %, що порівняно небагато.

Маса дроту, визначена саморобними вагами, має похибки за рахунок неточності вимірювання плечей важеля. При довжині плеча 10 см і ціні поділки 0,1 см відносна похибка не перевищує 1 % на плече, а загалом 2 %, що теж припустимо.

Тому точність двох перших вимірювань теплоємностей калориметра і дроту можна оцінити у 20 %, в основному, за рахунок похибок термометра.

Значно гірша картина у випадку вимірювання питомої теплоти плавлення. Вода має аномально велику у порівнянні з іншими речовинами теплоємність. Мала маса розплавленого металу, 3-4 г, не здатна значно підвищити температуру води у калориметрі. З іншого боку, води у калориметрі повинно бути достатньо багато для того, щоб занурити у неї термометр, і запобігти попаданню розплавлених крапель металу на пластмасові стінки. В результаті зміна температури води після кристалізації і охолодження металу не перевищує 2 – 3 градусів, що одразу дає відносну похибку 30 – 50 %, що дуже багато.

Задача 2

1. Визначити геометричні розміри можна декількома способами. Наприклад, не розмотуючи цілий скотч, виміряти лінійкою зовнішній d_2 та внутрішній d_1 діаметри рулону і зміню зовнішнього діаметру d'_2 при розмотуванні декількох десятків витків N скотчу. Товщина скотчу:

$$h = \frac{d_2 - d'_2}{2N} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,04 \text{ мм}.$$

Похибка вимірювання товщини стрічки буде значною через невелику різницю діаметрів d'_2 і d_2 .

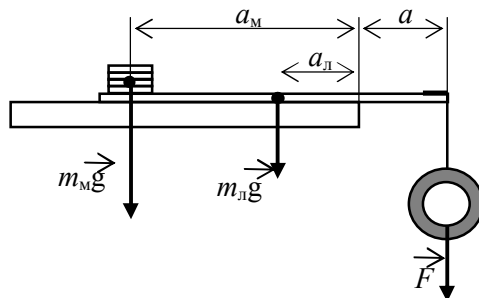
Довжину скотчу можна визначити, використовуючи значення вже відомих діаметрів: $l_0 = \pi \frac{d_2^2 - d_1^2}{4h} \approx 20,17 \text{ м}.$

Цей спосіб, хоч і не потребує додаткових вимірювань, але має значну похибку, пов'язану із похибкою вимірювань h .

Також можна визначити l_0 , використовуючи співвідношення маси відмотаного скотчу m відомої довжини l і маси нерозмотаного скотчу m_0 (без маси шпулі). Ці маси визначаємо, використовуючи важільні терези із лінійки та монет (правило моментів): $l_0 = \frac{m_0}{m} l \approx 19,94 \text{ м}.$

Похибка цього методу: $\varepsilon(l_0) \approx 7\%$.

2. Для вимірювання сили F складаємо установку, подібну до тої, що зображено на малюнку.



Проводимо вимірювання і данні заносимо до таблиці

№	a_m , м	a_l , м	a , м	F , Н
1	...	...	...	...
..	...	...	...	...

Силу розраховуємо за формулою: $F = \frac{m_l a_l + m_m a_m}{a} g \approx 1,68 \text{ Н}$, де m_m – маса монет; m_l – маса лінійки (її можна знайти за допомогою монет та правила моментів).

За визначеними силою F та довжиною l_0 визначаємо роботу по розмотуванню рулону: $A = F \cdot l_0 \approx 33,6 \text{ Дж}$, а також питому поверхневу енергію

адгезії: $\omega = \frac{A}{S} = \frac{F \cdot l}{l \cdot b} = \frac{F}{b} \approx 93,3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$, де $b = 18 \text{ мм}$ – ширина скотчу. Оцінюємо

точність отриманих результатів: $\varepsilon(F) \approx 6\%$, $\varepsilon(A) \approx 13\%$, $\varepsilon(\omega) \approx 6\%$.

11 КЛАС

Задача 1

Для того, щоб досягти стійкого руху кульки по коловій траєкторії, обертатимемо вертикальну вісь лійки вздовж невеликого кола радіусом l (див. вигляд згори на схем. мал. 1). Кулька всередині лійки рухатиметься з тією ж частотою вздовж вказаної на мал. 1 колової траєкторії. На мал. 2 зображені сили, що діють на кульку.

Знаходимо $N = \frac{mg}{\sin \alpha}$, $N_{\text{гор}} = \frac{mg}{\text{tg} \alpha}$.

За умовою $F_{\tau} = \frac{k}{r} N$, де r – радіус

кульки. Отже, $F_{\tau}/N_{\text{гор}} = k/(r \cos \alpha)$.

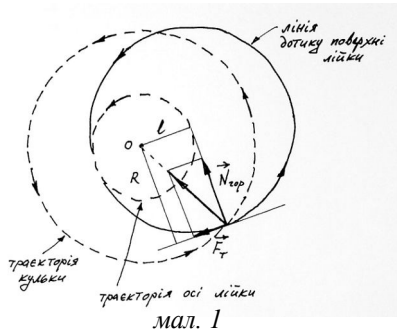
Моменти сили тертя та горизонтальної складової сили реакції опори відносно вертикальної осі, що проходить через центр колової траєкторії кульки компенсують один одного (мал. 1).

Звідси маємо $F_{\tau} R = N_{\text{гор}} l$.

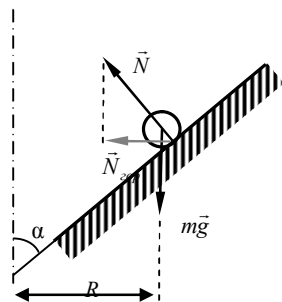
Враховуючи $F_{\tau}/N_{\text{гор}} = k/(r \cos \alpha)$, отримуємо

остаточну формулу: $k = \frac{lr \cos \alpha}{R}$.

Обертаємо вісь лійки вздовж кола радіусом l (l знаходимо за слідом закріпленого на ніжці лійки олівця) таким чином, щоб кулька рухалась на однаковій висоті, що відповідає радіусу R). Визначивши також радіус кульки r , а також кут розходження лійки ($\alpha \approx 45^\circ$), обчислюємо коефіцієнт тертя кочення. Проводимо декілька вимірювань для різних радіусів, знаходимо середнє значення коефіцієнту тертя та похибки.



мал. 1



мал. 2

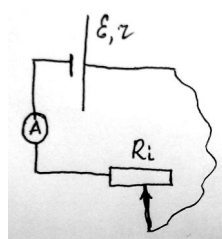
Задача 2

Теоретичну залежність $P = f(R)$, де R – опір зовнішньої частини кола,

а r – внутрішній опір, легко отримати: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ (1), $P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R$. (2)

Дослідивши функцію на екстремум, побачимо, що максимальне значення потужності досягається при умові $R = r$. Побудуємо відповідну теоретичну криву за формулою (2) з екстремумом у заданій точці. Знайти ε та r можна дуже легко, підключивши амперметр безпосередньо до клем джерела. Боятися вивести з ладу амперметр тут не слід, внутрішній опір джерела достатньо великий!

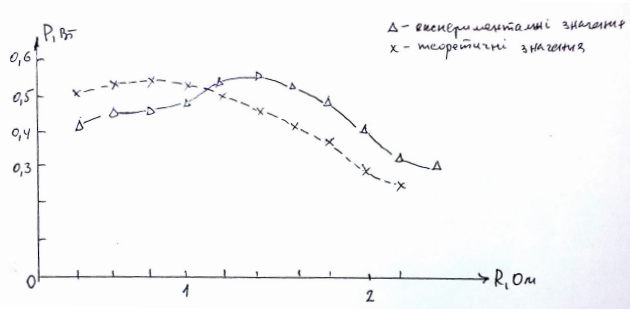
Для побудови експериментальної залежності слід зібрати схему (див. мал. 1).



мал. 1

Резистор змінного опору можна виготовити натягнувши вздовж лінійки відрізок манганінового дроту з відомим опором одиниці довжини. Кінці дроту можна закріпити скотчем, а провідник з голкою використати у якості рухомого контакту. Незаважко зрозуміти, що таким чином ми можемо задавати R і вимірювати відповідний йому струм I .

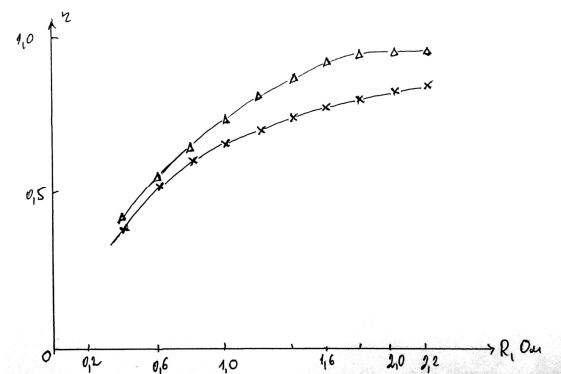
На основі отриманих результатів легко побудувати експериментальну залежність.



мал. 2

На мал. 2 зображено можливий вигляд обох кривих. Видно, що максимум потужності в експериментальній кривій “припадає” на більший зовнішній опір. Пояснити це можна лише суттєвим зростанням внутрішнього опору джерела в процесі вимірювання

Коефіцієнт корисної дії $\eta = \frac{R}{R+r}$ можна розрахувати як теоретично, так і за даними вимірювань, відобразивши графічно експериментальні і теоретичні залежності.



мал. 3

Неспівпадіння теоретичної та експериментальної кривих мають те ж пояснення, що і у попередньому випадку.

Для довідки. В нашому випадку внутрішній опір був свідомо збільшеним (до батареї послідовно приєднаний провідник, все це приховано від дослідника) і мав значення порядку 0,5 Ом.

Науково-популярне видання

Міністерство освіти і науки України

Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат
при Львівському національному університеті
імені Івана Франка

“ЛЕВЕНЯ – 2013”

ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник

Уклав *А л е к с е й ч у к* Володимир Іванович

Редактор і коректор *Олександр Хміль*
Технічний редактор *Леся Пелехата*

Підписано до друку 20. 07. 2013.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк 2,79
Обл. вид. арк. 2,43 Наклад 34 000 прим.

Видавництво “Каменярь”: 79008, Львів, Підвальна, 3
Свідоцтво Держ. реєстру: серія ДК, № 462
Ел. адреса: vyd_kamenyar@mail.lviv.ua

Віддруковано ТЗОВ “Видавничий Дім ІНБУК”
79070, Львів, вул. Г. Хоткевича, 14/117

Оргкомітет конкурсу “Левеня – 2013”:

**Володимир Алексейчук,
Володимир Дзюбанський,
Борис Кременський,
Микола Петрунів,
Олена Хоменко.**

Адреса оргкомітету:

79054, Львів, вул. Караджича, 29
Львівський фізико-математичний ліцей
Тел./факс: (032) 240-17-02
E-mail: levenia.lviv@gmail.com
[http:// levenia.com.ua](http://levenia.com.ua)

Директор ліцею **Мар’ян Добосевич**

Благодійний фонд “Ліцей”:

Філія АТ “Укресімбанк”
рахунок отримувача 260030260560
МФО 325718
ЄДРПОУ 22360064

Виконавчий директор благодійного фонду “Ліцей”
Михайло Мурашук