

Міністерство освіти і науки України

*Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат
при Львівському національному університеті
імені Івана Франка*

„ЛЕВЕНЯ – 2014” ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник



Львів
Каменяр
2014

УДК 372.853
ББК 74.265.1-922
ЛЗ5

Цю книжку оргкомітет конкурсу підготував для переможців, сподіваючись, що зібрані в ній матеріали будуть корисними для учнів, які цікавляться різними видами інтелектуальних змагань (олімпіади, конкурси, турніри) з фізики, та для вчителів, які їх готуватимуть.

Списки переможців конкурсу подано на сайті levenia.com.ua.

Упорядник
Володимир Алексейчук

Дорогі друзі – шанувальники фізичного конкурсу «Левеня»!

Чи не задавали Ви питання, що було б, якби не існувало такої науки, як фізика?

Багато з вас вже не уявляють, як можна жити без стільникового телефону та комп'ютеру, без зручної побутової техніки й транспорту, взагалі, без електрики. Усі ці зручності сучасного світу - світу складної техніки – досягнення саме фізики.

Практично в будь-якій професії людина стикається зі складним обладнанням. Необхідно мати хоча б приблизне уявлення про ті процеси, що в ньому протікають. Апаратура лікаря, комп'ютер бізнесмена, транспортні засоби, космічна техніка і багато іншого були створені завдяки успіхам природничих наук і математики. Тому, у наш час, коли техніка розвивається стрімкими темпами, фізика - одна із затребуваних наук. Саме вона дозволяє глибоко зрозуміти те, що відбувається навколо нас і в співдружності з іншими природничо-математичними дисциплінами дозволяє прогнозувати події. Зрештою, саме фізики шукають відповіді на питання, як знайти нові джерела енергії, і в глобальному, як же все-таки виник Всесвіт.

На уроках фізики в школі ви намагаєтеся пояснити явища, що спостерігаєте в природі чи в експерименті, вчитися розв'язувати задачі. Таким чином ви вивчаєте навколишній світ, у якому живите.

Чому ж слід розв'язувати фізичні задачі? Адже за їх допомогою ми шукаємо можливі шляхи, встановлюємо логічні зв'язки, аналізуємо, і чим частіше ми це робимо, тим більш гнучким стає наш розум. Адже в житті ми щодня вирішуємо якісь проблеми, причому мозок робить при цьому роботу, аналогічну тій, що і при розв'язуванні задач. До речі, робота – це теж фізичне поняття.

Задачі Всеукраїнського фізичного конкурсу «Левеня» - це ще одна сходинка на вищий рівень знань з фізики. Саме такі нестандартні завдання виявляють ваші здібності, заохочують до вивчення природничо-математичних наук.

Організатори конкурсу «Левеня» з Львівського фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті імені Івана Франка намагаються зацікавити вас й іншими інтелектуальними змаганнями з фізики, що традиційно проводяться в Україні. У представлений добірці ви можете познайомитися із задачами цьогорічної Всеукраїнської фізичної олімпіади, що проходила в м. Суми. Наведені розв'язки досить складних завдань допоможуть вам зрозуміти, що існують нестандартні підходи до вирішення не тільки фізичної задачі, а й інших життєвих проблем.

Сподіваюся, що й надалі не згасатиме ваше бажання до участі в інтелектуальних заходах, до пізнання основ наук, до відкриття нових законів Фізики!

Хоменко Олена Вікторівна,
головний спеціаліст
Міністерства освіти і науки України

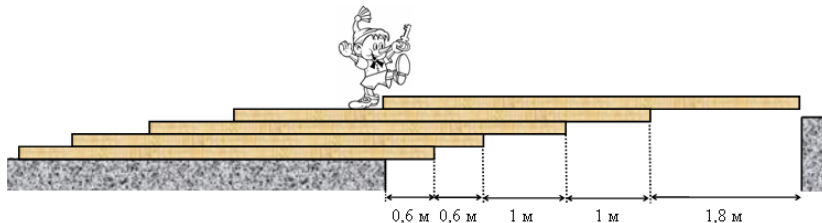
Теоретичний тур

8-й клас

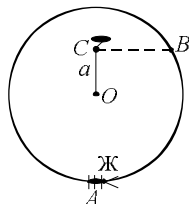
8.1. У безвітряну погоду прямим шосе їде колона автомобілів, підтримуючи відстань 100 м один від одного. Крайній автомобіль подає звуковий сигнал. Почувши його, водій наступного автомобіля з невеликою затримкою ($\tau = 1$ с) тисне на клаксон. Так від одного автомобіля до іншого з однаковими затримками часу сигнал передається з одного кінця колони в інший. Знайдіть швидкості поширення сигналу в один та в інший бік колони. Швидкість звуку у повітрі $c = 325$ м/с, швидкість колони $v = 90$ км/год.

Застосуйте аналогічну ідею для пояснення поширення світла в прозорому середовищі, вважаючи, що між атомами квант світла рухається зі швидкістю світла у вакуумі c , на деякий час поглинається, а потім випромінюється знову. Швидкість поширення світла у середовищі $u_0 = c/n$, де n – показник заломлення цього середовища. Знайдіть, на скільки швидкість u світла у напрямку руху потоку води ($n = 4/3$) перевищує швидкість u_0 світла у нерухомій воді. Швидкість води $v = 7$ м/с.

8.2. Буратіно вирішив утекти з полону у Карабаса-Барабаса. Він знайшов п'ять однакових дубових дощок, кожен утримав важку за себе, і висунув їх над прірвою (див. мал.). Доведіть, що дошки у такому положенні самі собою втримаються і не впадуть. Наскільки далеко Буратіно може обережно пройти ними? Запропонуйте Буратіно, як утекти від Карабаса-Барабаса, маса якого така сама, як у Буратіно і всіх дощок, разом узятих.



8.3. Легкий диск радіусом $R = 8$ см, який може вільно обертатися, підвішений на осі, що проходить на відстані $a = 4$ см від його центру (див. мал.). У нижню точку A диска сідає важкий жук і починає повзти по краю диска. Який шлях пройде центр диска (точка O) до того моменту, коли жук доповзе до точки B ? Задачу розв'язати, припускаючи, що жук набагато важчий, ніж диск.



8.4. На фото, зробленому з Землі (штат Флорида, США), МКС і «Атлантіс» на фоні Сонця під час останньої експедиції відвідування 25 травня 2010 року (*див. мал.*). Міжнародна космічна станція (МКС) має довжину 72,8 м, ширину 108,5 м. Довжина багаторазового корабля «Атлантіс» 37 м, а розмах крил складає 24 м. Поясніть відмінність між співвідношеннями розмірів на фото і у дійсності. Визначте висоту орбіти МКС над поверхнею Землі. Радіус Сонця 696 тис. км, відстань від Сонця до Землі 149,6 млн. км. Землю вважайте кулею.



Зауваження: під час розв'язку задачі можете скористатись виданою Вам лінійкою.

8.5. Струмінь води, що витікає з крана, звужується донизу. Знайти залежність діаметра d струменя від відстані l до крана. Початкова швидкість витікання води v_0 , діаметр отвору крана d_0 .

Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1,2,4), Є. П. Соколов (3), І. О. Анісімов (5).

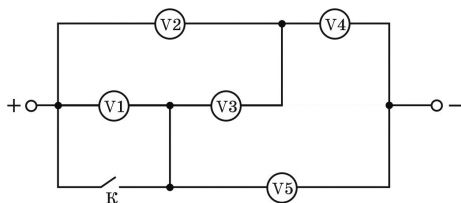
9 клас

9.1. В електрочайник потужністю 2 кВт налили літр води. Після того, як вода почала інтенсивно кипіти, чайник автоматично вимикається, але кипіння продовжується ще 15 с, поступово зменшуючи інтенсивність утво-

рення бульбашок пари. Ще через 30 с температура води у чайнику зменшується на 1°C . Вважаючи, що інтенсивність кипіння після вимкнення чайника зменшувалась рівномірно визначте середню температуру нагрівального елемента чайника у момент вимкнення. Чому дорівнює ККД чайника при температурах води, близьких до 100°C ? Запропонуйте формулу залежності ККД чайника від температури води. Маса нагрівального елемента $m = 200\text{ г}$, його питома теплоємність $c = 500\text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$, питома теплоємність води $c_{\text{в}} = 4200\text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$.

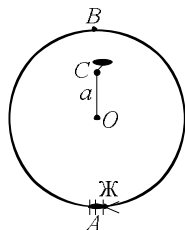
9.2. Тонка паличка AB суміщена із головною оптичною віссю збиральної лінзи так, що точка A збігається з точкою подвійної фокусної відстані лінзи, а точка B знаходиться на відстані $2,5 F$ від лінзи. Паличка починає рухатися з швидкістю $v = \text{const}$ у напрямку оптичного центра лінзи. Визначте відношення середніх швидкостей руху зображень точок A і B за час, протягом якого точка B переміститься в точку $2F$ лінзи. Визначте відношення розмірів зображення до розмірів палички в момент часу, коли точка B проходить точку $2F$.

9.3. Учень склав із п'яти вольтметрів коло (див. мал.) та приєднав його до джерела постійної напруги. Відомо, що вольтметри V_1 і V_4 однакові. У таблиці наведені покази деяких вольтметрів залежно від положення ключа K . У скільки разів опори вольтметрів V_1 і V_3 відрізняються від опору вольтметра V_2 ?

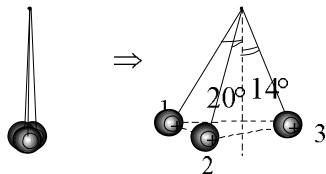


Покази вольтметрів	Ключ К розімкнено	Ключ К замкнено
V_1	3 В	0
V_2	2 В	1 В
V_3	3 В	4 В

9.4. Невагомий диск радіуса $R = 8\text{ см}$, який може вільно обертатися, підвішений на осі, що проходить на відстані $a = 4\text{ см}$ від його центру (див. мал.). У нижню точку диска A сідає важкий жук і починає повзти по краю диска зі швидкістю $V = 12\text{ мм/хв}$ на протилежний край диска, в точку B . Через який час жук набере максимальну швидкість (відносно нерухомої системи відліку)? Чому вона дорівнює? Чому дорівнює швидкість жука щодо нерухомої системи координат в той момент, коли він проповзе половину шляху AB відносно диска?



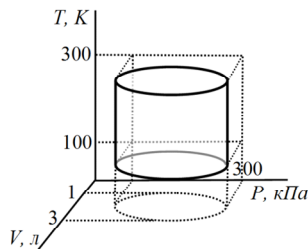
9.5. Три провідні кульки однакового розміру, але зроблені з різних матеріалів, підвисили на трьох нитках однакової довжини, закріплених в одній точці. Після надання цим кулям деякого заряду, кульки за рахунок кулонівського відштовхування розійшлися, утворивши рівнобедрений трикутник (див. мал.). При цьому нитки першої та другої кульки утворили з вертикаллю кут 20° , а нитка третьої кульки – кут 14° . Які кути з вертикаллю утворюють нитки, якщо у новому досліді кулям надати заряд, у 2014 разів більший від попереднього?



Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1, 2), І. М. Гельфгат (3), Є. П. Соколов (4–5).

10 клас

10.1. Гелій знаходиться у спеціальному циліндрі з рухомим поршнем. Контролюючий пристрій забезпечує обмеження на можливі значення об'єму, тиску, температури і маси газу. Ці обмеження мають вигляд циліндричної поверхні на P - V - T діаграмі (див. мал.), де тиск може змінюватись від 100 кПа до 300 кПа, об'єм – від 1 л до 3 л, а температура – від 100 К до 300 К. Знайдіть мінімальне і максимальне значення, яке може мати маса газу у циліндрі, і вкажіть на діаграмі відповідні точки. Вантаж якої маси можна покласти на невагомий поршень, якщо циліндр закріпити у вертикальному положенні? Знайдіть максимальну корисну роботу, яку може виконати газ під поршнем, піднімаючи вантаж. Зовнішній атмосферний тиск $P_A = 100$ кПа, площа поршня $S = 1$ дм².

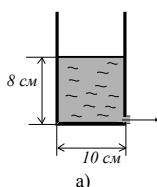


10.2. Учень вирішив зробити новорічну гірлянду з однакових лампочок розжарювання, розрахованих на потужність $P = 4,9$ Вт і напругу $U = 220$ В кожна. Для цього він з'єднав між собою п'ять клем лампочок (по одній лампочці між будь-якою парою клем) і до двох клем підключив джерело напруги 220 В. Нехтуючи залежністю опору від температури, знайдіть потужності, що виділятимуться у лампочках. Якими стануть ці потужності, якщо одна з лампочок перегорить? Дайте відповіді на попередні питання у випадку довільної кількості клем n .

10.3. Модель гусениці складається з n однакових частин-модулів, що можуть віддалятися один від одного в напрямку руху на відстань $l = 1$ см. Гусениця висуває вперед перший модуль, потім підтягає до нього другий, і так далі аж до останнього. Чому може дорівнювати швидкість гусениці? Гусениця з якою кількістю частин виявиться найпрудкішою? Коефіцієнт

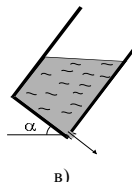
тертя між поверхнями столу і гусениці $\mu = 0,8$. Під час руху одного модуля всі інші нерухомі, а сила, з якою гусениця рухає модуль, спрямована вздовж її тулуба. Під яким максимальним кутом до горизонту гусениця може підніматися по похилій площині?

10.4. Високу призматичну посудину наповнюють водою до висоти 8 см і потім відкривають невеликий отвір, розташований біля дна (див. мал. а). Таблиця (див. мал. б) показує, як



висота рівня (см)	час (с)
8,0	0
7,0	20,0
6,0	41,2
5,0	64,4

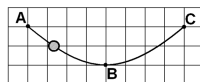
б)



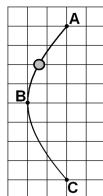
в)

знижується після цього рівень води в посудині з часом. Після того як рівень води опустився на 3 см, отвір закривають і нахиляють посудину на кут $\alpha = 37^\circ$ (див. мал. в). Через який час після відкриття отвору рівень води в нахилений посудині знизиться ще на 1 см? Основа посудини – квадрат зі стороною 10 см, для розрахунків прийняти $\sin \alpha = 3/5$ і $\cos \alpha = 4/5$.

10.5. По вигнутій дротині може без тертя ковзати намистинка (див. мал.). Якщо розташувати цю дротину горизонтально, як показано на мал. а, і відпустити намистинку з точки А без початкової швидкості, то її прискорення в нижній точці В дорівнюватиме $a = 10 \text{ м/с}^2$. Ту саму дротинку, так само вигнуту, розташовують вертикально і знову відпускають намистинку з точки А без початкової швидкості (мал. б). Яким у цьому випадку буде її прискорення в точці В? Для розрахунків прийняти $g = 10 \text{ м/с}^2$, необхідні геометричні дані подано на мал.



а)



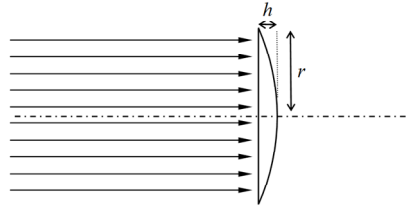
б)

Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1–3), Є. П. Соколов (4, 5).

11 клас

11.1. Мінімальна відстань від астероїда до Сонця дорівнює 0,5 а. о., а максимальна – 1,5 а. о. Запишіть рівняння траєкторії астероїда в інерціальній системі відліку, пов'язаній із Сонцем. Зобразіть схематично траєкторію. Розрахуйте кути її перетину з траєкторією Землі. Зобразіть схематично траєкторію астероїда у системі відліку, що обертається навколо Сонця разом із Землею. Обґрунтуйте вигляд траєкторії. Визначте напрям дотичної до цієї траєкторії на відстані 1 а. о. від Сонця. Вважайте орбіту Землі колом радіусом 1 а. о. Астероїд і Земля обертаються навколо Сонця в одній площині та в один бік, вважайте Землю за матеріальну точку.

11.2. Тонка плоско-опукла лінза радіусом r і товщиною $h = 2,5$ мм виготовлена з матеріалу, показник заломлення якого n . У повітрі на плоску поверхню лінзи перпендикулярно до неї падає паралельний пучок монохроматичного світла (див. мал.). Якщо опукла частина лінзи утворена сферичною поверхню, паралельний пучок після проходження лінзи в одній точці не збирається, а освітлює деякий об'єм біля фокусу. Визначте найменшу довжину відрізка головної оптичної осі, що виявиться освітленим.



11.3. Необмежена ідеально провідна заряджена площина з поверхневою густиною заряду σ та поверхневою густиною маси ρ починає поступально рухатися зі швидкістю v_0 , перпендикулярно до своєї поверхні. В початковий момент часу вона знаходиться в лівому кінці вакуумного міжелектродного проміжку довжиною L , обмеженому двома ідеально провідними заземленими нескінченими площинами. За якої умови заряджена площина долетить до правого кінця проміжку?

11.4. Протон рухається по гвинтовій траєкторії навколо напрямку магнітного поля Землі у радіаційному поясі ван Аллена, де мінімальна індукція магнітного поля в середній частині поясу складає $B_1 = 6,5$ мкТл. За якого співвідношення між поздовжньою (вздовж напрямку геомагнітного поля) та поперечною швидкістю протона в середній частині поясу буде можливим його відбивання від області більш сильного магнітного поля поблизу магнітного полюсу, де максимальне значення поля складає $B_2 = 65$ мкТл.

Вказівка: Індукція магнітного поля вздовж його напрямку змінюється дуже повільно.

11.5. Якщо маленька кулька падає в повітрі з великої висоти, вона розганяється до максимальної швидкості $u = 10$ м/с. Цю кульку кинули з рівня Землі з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Кулька впала на землю через $t = 1,6$ с. Визначте: 1) швидкість v_1 кульки у верхній точці; 2) модуль швидкості v кульки перед падінням; 3) відстань L від початкової точки до точки падіння. Чи може висота H верхньої точки траєкторії дорівнювати 1,5 м? Вважайте, що сила опору повітря прямо пропорційна швидкості, $g = 10$ м/с².

Задачі запропонували О. Ю. Орлянський (1, 2), І. О. Анісімов (3), О. І. Кельник (4), І. М. Гельфгат (5).

Експериментальний тур

8 клас

Завдання 1. Визначити густину невідомої рідини.

У звіті надати докладний опис методики проведення експерименту, оцінку результату, висновки.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: прозора одноразова склянка з рідиною невідомої густини, лінійка, прозора трубочка, прозора пляшка з чистою водою, серветки. *Групове:* відро порожнє, відро з водою.

Завдання 2. Визначте відношення сил світла джерел (світлодіодів) у напрямку їх вісі симетрії.

У звіті запропонуйте детальний опис методики проведення експерименту, схему вимірювальної установки, таблицю результатів.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: два світлодіоди зі з'єднувальними провідниками (світлодіод більшого діаметра з чорною ізоляцією – № 1, меншого діаметра – № 2); джерело живлення для світлодіодів (9 В); смужка міліметрового паперу; пластилін; смужка білого паперу (ширина 2–3 см, довжина 10–12 см); смужка тонкого картону (ширина 2–3 см, довжина 10–12 см). *Групове:* маркер.

Примітка: Випромінювання світлодіода вздовж вісі симетрії розглядати як випромінювання точкового джерела світла.

9 клас

Завдання 1. За допомогою запропонованого обладнання:

- зберіть установку для прямого вимірювання концентрації солі у водному розчині;
- зобразіть схему установки і опишіть принцип її роботи;
- проградуйте шкалу приладу в міліграмах на кубічний дециметр, визначте з його допомогою вміст солі в мінеральній воді;
- оцініть точність розробленої методики і похибку вимірювального приладу;
- вкажіть, що потрібно зробити для підвищення точності запропонованої Вами методики.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: джерело сталої напруги 9 В, лабораторний вольтметр, зображення шкали вольтметра, порція дистильованої води (120–150 мл), порція кухонної солі – 5 г, міліметровий папір, 3 провідники, два з яких мають зачищені кінці, пластикова посудина 150–200 мл, мішалка, негазована хлоридно-натрієва мінеральна вода. *Групове:* мірний циліндр, скотч, ножиці.

Рекомендація. Почніть градування приладу, переходячи від менших концентрацій до більших. Для першого вимірювання взяти 1/256 частину наявної кількості солі.

Завдання 2. Див. 8 клас, завдання № 2.

10 клас

Завдання 1. До торця циліндра пластиліном закріпити спицю і розмістити на лінійці, що лежить на кінці стола (див. мал.):

- знайдіть залежність періоду коливань циліндра на поверхні лінійки від довжини частини спиці, яка знаходиться нижче циліндра;

- використовуючи попередні результати, знайдіть відношення маси циліндра до маси спиці;

- визначте коефіцієнт тертя кочення циліндра по лінійці, досліджуючи загасаючі коливання системи. Вважати, що кінетична енергія циліндра значно більша кінетичної енергії спиці, а сила тертя кочення постійна протягом періоду коливань;

- оцініть точність отриманих результатів.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: алюмінієвий циліндр, спиця 25–30 см., лінійка, міліметровий папір. Групове: пластилін, годинник з секундною стрілкою.

Теоретична довідка: Основне рівняння динаміки обертально-

го руху твердого тіла $\varepsilon \cdot J = \sum_{i=1}^N M_i$, де: ε – кутове прискорення $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (рад/с²);

J – момент інерції тіла (для циліндра момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, дорівнює $(1/2)mR^2$); R – радіус циліндра; M – момент

сили. Кінетична енергія тіла, що обертається: $E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$ де ω – кутова

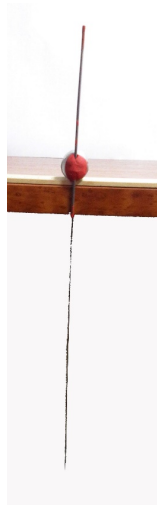
швидкість $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (рад/с). Сила тертя кочення зв'язана з коефіцієнтом тертя

співвідношенням: $F_{\text{тр}} = \frac{k}{R} \cdot N$, де: k – коефіцієнт тертя, R – радіус тіла, що котиться, N – сила нормального тиску.

Завдання 2. Користуючись запропонованим обладнанням:

- визначте ефективний об'єм власних легенів;

- оцініть точність розробленої вами методики експерименту.



Матеріали та обладнання: Індивідуальне: шматочок танучого льоду, соломинка для коктейлю, одноразова склянка, шприц без голки, лінійка, міліметровий папір. *Групове:* годинник.

Довідка: питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг; універсальна газова стала – 8,31 Дж/(моль·К).

11 клас

Завдання 1. 1. Запропонувати спосіб і виготовити пристрій для дослідження залежності сили світла, яку випромінює лампочка, від сили струму, що проходить через її спіраль.

2. Вважаючи, що максимальна сила струму дорівнює 0,25 А, знайти значення сили струму, при яких сила світла, яка випромінюється лампочкою, зменшиться: а) в 10 разів, б) в 100 разів.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: дві сірникові коробки, пластилін, аркуш білого паперу, дві лампочки розжарювання для кишенькового ліхтарика з припаяними провідниками (віддалі від спіралі лампочки до поверхні лампочки дорівнює 4 міліметри), джерело живлення, ніхромові спіраль, амперметр шкільний, провідники з'єднувальні, міліметровий папір, канцелярські скріпки. *Групове:* ножиці, скотч, чорний маркер

У звіті подайте:

теоретичне обґрунтування запропонованого способу з усіма необхідними малюнками та формулами;

опис установки і принципу проведення вимірювання;

таблицю експериментальних результатів;

оцінку точності отриманих результатів;

висновки.

Завдання 2. За допомогою запропонованого обладнання:

виготовте маятник, використовуючи нитку, пластилін і магніт. Довжина маятника має бути приблизно 1 м. Вивчіть залежність від часу амплітуди згасаючих коливань маятника над кожною з мідних пластинок. Віддалі від поверхні пластинки до поверхні магніту встановіть 0,5 см.

визначте коефіцієнт згасання. Від чого він залежить?

оцініть густину струму в мідній пластинці при проходженні над нею магніту.

оцініть точність розробленої вами методики експерименту.

Матеріали та обладнання: Індивідуальне: неодимовий магніт (магнітна індукція на відстані 0,5 см дорівнює 0,012 Тл), лінійка, міліметровий папір, дві мідні пластинки різної товщини, штатив шкільний з лапкою. *Групове:*

нитка, годинник із великою секундною стрілкою, пластилін, терези з важками.

У звіті наведіть:

теоретичне обґрунтування вибраного методу;

порядок виконання вимірювань, таблиці з результатами вимірювань;

оцінку точності отриманих результатів

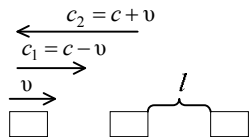
Довідкові дані: Рівняння, що описує згасаючі коливання, – $x = x_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$,
де: x_0 – початкова амплітуда, δ – коефіцієнт згасання. Густина міді $8\,900\text{ кг/м}^3$, питомий опір $1,7 \cdot 10^{-8}\text{ Ом} \cdot \text{м}$.

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

8 клас

Задача 8.1

Розглянемо процес передачі сигналу в СВ, зв'язаний з колоною (див. мал.). Якщо швидкості сигналу в цій системі позначити як v_1 (за напрямом руху колони) і v_2 (проти руху колони), то відповідні шукані швидкості в СВ зв'язаний з Землею $u_1 = v_1 + v$, $u_2 = v_2 - v$.



Повний час проходження сигналу від одного автомобіля до сусіднього в напрямку руху (враховуючи, що швидкість звуку в цьому напрямку

$c_1 = c - v$ відносно колони) разом із затримкою $\Delta t_1 = \frac{l}{c - v} + \tau$. Час проходження сигналу у зворотному напрямку (швидкість звуку $c_2 = c + v$)

$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v} + \tau$. Тоді швидкості відносно колони $v_1 = \frac{l}{\Delta t_1} = \frac{1}{\frac{l}{c - v} + \tau}$,

$v_2 = \frac{l}{\Delta t_2} = \frac{1}{\frac{l}{c + v} + \tau}$. Шукані швидкості $u_1 = \frac{c - v}{1 + \frac{\tau}{l}(c - v)} + v = 100 \text{ м/с}$,

$u_2 = \frac{c + v}{1 + \frac{\tau}{l}(c + v)} - v \approx 53 \text{ м/с}$.

При поширенні світла в нерухомому середовищі (як для нерухомої колони автомобілів) $u_0 = \frac{c}{1 + \frac{\tau}{l}c}$. Швидкість світла пов'язана з коефіцієнтом залом-

лення $u_0 = \frac{c}{n}$. Звідси $n = 1 + \frac{\tau}{l}c$, $\frac{\tau}{l} = \frac{n - 1}{c}$.

Швидкість світла уздовж потоку води

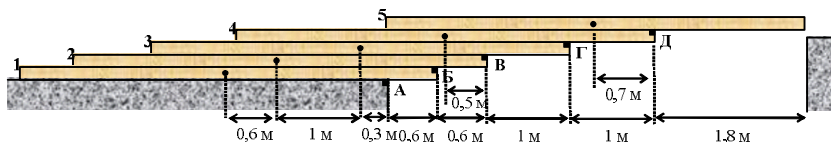
$u = u_1 = \frac{c - v}{1 + (n - 1)(1 - \frac{v}{c})} + v = v + \frac{c - v}{n - (n - 1)\frac{v}{c}}$.

Різниця швидкостей $\Delta u = u - u_0 = u - \frac{c}{n} = v \left(1 - \frac{1}{n^2 - n(n - 1)\frac{v}{c}} \right) + v \approx 3,06 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$(n(n-1)\frac{v}{c} \ll n^2), \text{ звідки } \Delta u \approx v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

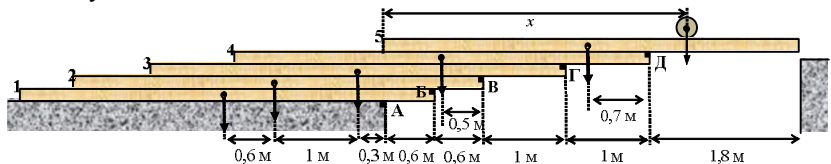
Згідно з малюнком, довжина дошки 5 м.

Верхня, п'ята, дошка впасти з четвертої не може, оскільки нависає над нею менше, ніж наполовину (*див. мал. 1*). Четверта дошка разом з п'ятою впасти з третьої не можуть, оскільки їх центр мас знаходиться на відстані 1,6 м по горизонталі від лівого краю прірви, що менше, ніж 2,2 м, відстань до точки G краю третьої дошки.



мал. I

Розглянемо рівновагу трьох верхніх дошок відносно точки B . За годинниковою стрілкою їх намагається повернути сила тяжіння, що діє на п'яту дошку, її момент $M_5 = mg \cdot 1,3 \text{ м}$. Проти годинникової стрілки – сили тяжіння, що діють на четверту і третю дошки $M_4 = mg \cdot 0,5 \text{ м}$, $M_3 = mg \cdot 1,5 \text{ м}$. Оскільки $M_4 + M_3 = mg \cdot 2 \text{ м} > M_5 = mg \cdot 1,3 \text{ м}$, навколо точки B дошки за годинниковою стрілкою перевертатися не почнуть. Аналогічно доводимо для точок B і A . Оскільки навколо жодної з точок поворот не можливий, дошки не впадуть, незважаючи на те, що верхня дошка «висунулась» на всю свою довжину.



мал. 2

Визначимо найбільшу відстань x (див. мал. 2), на яку Буратіно може віддатись, розглядаючи рівновагу відносно різних точок.

Точка повороту	Рівняння рівноваги	x
D	$\frac{1}{3}mg(x-3,2)=mg\cdot 0,7$	$x=5,3\text{ м}$
Γ	$\frac{1}{3}mg(x-2,2)+mg\cdot 0,3=mg\cdot 1,5$	$x=5,8\text{ м}$
B	$\frac{1}{3}mg(x-1,2)+mg\cdot 1,3=mg\cdot 0,5+mg\cdot 1,5$	$x=3,3\text{ м}$
B	$\frac{1}{3}mg(x-0,6)+mg\cdot 1,9+mg\cdot 0,1=mg\cdot 0,9+mg\cdot 1,9$	$x=3\text{ м}$
A	$\frac{1}{3}mgx+mg\cdot 2,5+mg\cdot 0,7=mg\cdot 0,3+mg\cdot 1,3+mg\cdot 1,9$	$x=0,9\text{ м}$

Як бачимо з таблиці, найбільша відстань, на яку Буратіно може обережно відійти вправо від лівого краю прірви, тільки 0,9 м. Після цього вся конструкція почне завалюватись, повертаючись навколо точки A за годинниковою стрілкою. З таблиці також можна побачити, що, якби обертання навколо точок A , B , V виявилось не можливим, Буратіно спокійно міг би перейти п'ятиметрову прірву, не боячись обертання навколо точок Γ і D (розраховані відстані перевищують 5 м). Щоб врятувати Буратіно, по-перше, можна скористатися цим резервом і переформувати дошки. Для цього можна, наприклад, вчинити наступним чином. Розмістити Буратіно на самому краю верхньої, 5-ї, дошки ($x=5\text{ м}$), зсунути четверту дошку ліворуч настільки, наскільки ще можлива рівновага 5-ї дошки з Буратіно відносно точки D , знайти довжину її виступу. Потім також змістити вліво 3-ю дошку, знайти довжину її виступу відносно точки Γ , і так далі. Підсумувавши всі знайдені довжини виступів, можна знайти максимальну ширину прірви, яку Буратіно зможе перейти без сторонньої допомоги (Карабаса-Барабаса). Вона дорівнює приблизно 4,7 м, що менше ширини прірви за умови. Тобто переформатування дошок не вирішує проблеми. Залишимо їх у початковому стані і спробуємо скористатися Карабасом-Барабасом, як противагою. Якщо Карабас ступить на нижню дошку, намагаючись упіймати Буратіно, він своєю вагою притисне цю дошку до землі і обертання навколо точки A стане неможливим. Наприклад, для випадку, коли Карабас опиниться зліва на межі між першою і другою дошками, умова рівноваги відносно точки A

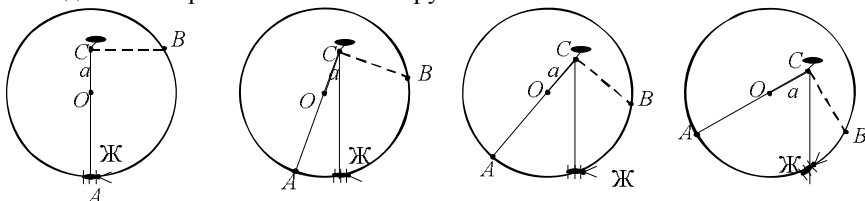
$$\frac{1}{3}mgx+mg\cdot 2,5+mg\cdot 0,7=mg\cdot 0,3+mg\cdot 1,3+mg\cdot 1,9+\frac{16}{3}mg\cdot 3,8$$

дає $x=61,7\text{ м}$ – дуже велике значення. Отже, Буратіно на самому початку

повинен стояти на позначці $x = 0,9 \text{ м}$, а після входження Карабаса на першу дошку бігти до позначки $x = 3 \text{ м}$, яку можна минути після того, як Карабас наступить на другу дошку. Після того, як Карабас наступить на третю дошку, про обмеження можна не думати, а бігти щодуху, оскільки з наближенням Карабаса до точки A рівновага може опинитися під загрозою.

Задача 8.3

1) Оскільки жук набагато важчий, ніж диск, то при русі він весь час залишається під точкою підвісу. Тому в нерухомій системі координат його рух являє підйом по вертикальній лінії вгору.



Такий рух виникає як результат двох рухів: рух жука по краю диска і повороту диска щодо точки підвісу.

2) Центр диска точка O завжди знаходиться на одній і тій же відстані $a = 4 \text{ см}$ від осі підвісу. Тобто вона рухається по колу.

Щоб знайти її шлях, треба знати кут, на який повернеться диск.

3) У нерухомій системі координат лінія CO повернеться на 90° і, отже, точка O пройде шлях рівний чверті довжини кола радіусом $a = 4 \text{ см}$:

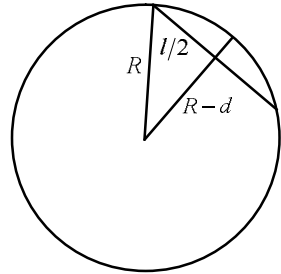
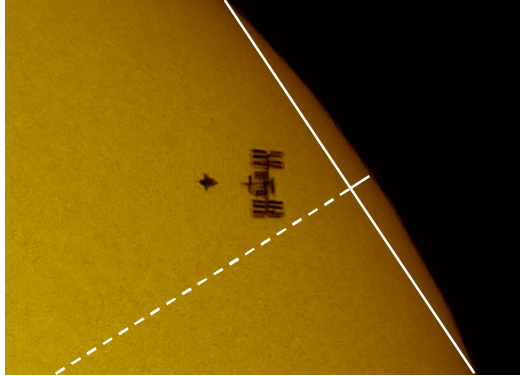
$$S = \frac{1}{4} \cdot 2\pi a = \frac{\pi a}{2} = 6,28 \text{ см.}$$

Задача 8.4

Невідповідність співвідношення розмірів на фото і у дійсності пов'язана з тим, що ми бачимо космічні апарати під деяким кутом відносно площини горизонтального перерізу КА.

Уздовж яких габаритів площина горизонтального перерізу КА нахилена відносно променя зору? З приведенного фото легко бачити, що нахил вздовж осі, перпендикулярної до панелей сонячних батарей (в проекції на вертикальну вісь наведеному фото), не має місця. Інакше б проміжки між панелями батарей були б на фото різної ширини. Однаковість величини проміжків свідчить про те, що нахил МКС має місце в проекції на горизонтальний напрямок (на фото).

Для відповіді на інші питання знаходимо радіус зображення Сонця на фото. Для цього проводимо хорду між крайніми точками зображення поверхні Сонця, в яких зображення перетинає горизонтальну рамку фотографії (див. мал.). За допомогою лінійки позначаємо на фото центр нашої хорди (див. мал.). Так ми отримаємо серединний перпендикуляр до хорди (див. мал.). Вимірюємо довжину хорди $l = 15$ мм і відстань від неї до дуги кола вздовж серединного перпендикуляра $d = 7$ мм. З допомогою теореми Піфагора отримуємо: $R^2 = (R - d)^2 + (l/2)^2$ (мал.).



Підставимо вимірні величини. Виходить

$$R = \frac{d^2 + (l/2)^2}{2d} \approx \frac{l^2}{8d} \approx 37,5 \text{ см}.$$

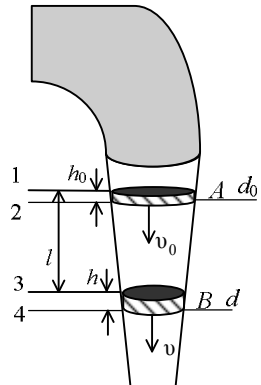
Ширина станції на фото $h = 22,5$ мм, у $50/3 \approx 16,7$ разів менша за обчислену величину радіуса Сонця. Цей розмір у стільки ж разів більший за справжній розмір станції $H = 108,5$ м, у скільки відстань до Сонця більша за відстань до станції. Звідси, склавши пропорцію, знаходимо висоту орбіти: $L = 306$ км.

Задача 8.5

Внаслідок нестисливості рідини її густина є сталою. Це означає, що за однакові проміжки часу через довільний переріз струменя будуть протікати однакові маси рідини (оскільки форма струменя не змінюється, течія стаціонарна) $m_0 = m$, $\rho V_0 = \rho V$, $V_0 = V$.

Розглянемо рідину між перерізами 1–3 (див. мал.). Діаметр перерізу 1 – d_0 , 3 – d . Через дуже малий інтервал часу Δt рідина займе положення між перерізами 2–4. Через перерізи 1 і 3 пройдуть однакові маси рідини $m_{12} = m_{34}$ ($V_{12} = V_{34}$)

$$V = Sh = \frac{\pi d^2}{4} h. \text{ Оскільки } \Delta t \text{ дуже мале } h_0 \text{ і } h$$



теж малі, а швидкість рідини практично не змінюється між перерізами 1–2 і 3–4, тоді: $h_0 = v_0 \Delta t$, $h = v \Delta t$. Об'єми рідин V_{12} , V_{34} циліндричні. Виконаємо

наступні математичні перетворення: $V_{12} = V_{34}$, $\frac{\pi d_0^2}{4} h_0 = \frac{\pi d^2}{4} h$. $d_0^2 h_0 = d^2 h$, $d_0^2 v_0 \Delta t = d^2 v \Delta t$, де: v_0 – швидкість води в перерізі 1; v – швидкість в перерізі 3.

$$d_0^2 v_0 = d^2 v, \quad d = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{v}}. \quad (1)$$

Для знаходження швидкості v скористаємося теоремою про кінетичну енергію ($\sum A_{\text{зов}} = \Delta K$), розглянувши рідину між перерізами 1–3. На виділену рідину діють:

$F_0 = P_0 S_0 = P_0 \frac{\pi d_0^2}{4}$ – сила тиску води в перерізі 1;

$F = P_0 S = P_0 \frac{\pi d^2}{4}$ – сила тиску води в перерізі 3; сила атмосферного тиску,

на бічну поверхню води (роботи не виконує); сила тяжіння. Через час Δt рідина зайняла положення 2–4. Між перерізами 2–3 за час Δt в рідині змін не сталося (течія стаціонарна). Можна вважати, що всі зміни пов'язані з переміщенням рідини об'єму V_{12} у об'єм V_{34} . Тобто робота: сили тяжіння – $A_{\text{тяж}} = \rho V_{12} g l$, сили F_0 : $A_0 = P_0 S_0 h_0 = P_0 V_{12}$, сили F : $A_F = -P_0 S h = -P_0 V_{34}$. Статичний тиск у всіх ділянках струменя однаковий і дорівнює P_0 , оскільки рідина контактує з атмосферою (не враховано лапласівський тиск). Запишемо теорему про кінетичну енергію:

$$\rho V_{12} g l + P_0 V_{12} - P_0 V_{34} = \Delta K = \frac{\rho V_{34} v^2}{2} - \frac{\rho V_{12} v_0^2}{2} \Rightarrow g l = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2 g l + v_0^2} \quad (2) \rightarrow (1) \quad d = d_0 \sqrt{v_0 / v} = d_0 \sqrt{v_0 / \sqrt{2 g l + v_0^2}}.$$

9 клас

Задача 9.1

Під час нагрівання води у чайнику кількість теплоти, що виділяє нагрівальний елемент, йде на нагрів води і на теплові втрати. Теплові втрати пропорційні різниці температур води T і навколишнього середовища T_0 . Інші чинники (площа поверхні чайника, місце розташування, наявність протягу, кількість води у чайнику) вважаємо незмінними. Отже, потужність теплових втрат $P_{\text{втр}} = k(T - T_0)$, де k – деякий коефіцієнт пропорційності. Нехай за невеликий проміжок часу Δt температура води у чайнику збільшувється з T_1 до T_2 . Тоді $P \Delta t = c_{\text{в}} m_{\text{в}} (T_2 - T_1) + k(T - T_0) \Delta t$ (1), де: P – потужність електро-

чайника, T – середня температура в проміжку від T_1 до T_2 . Це рівняння теплового балансу, у якому ми знехтували втратами теплоти на нагрів корпусу чайника у порівнянні з нагрівом води, яка має велику теплоємність.

За кипіння температура води залишається сталою $T_{100} = 100^\circ\text{C}$. Вся енергія, яку виділяє нагрівальний елемент, йде на випаровування води та на теплові втрати:

$$P\Delta t = L \frac{\Delta m_b}{\Delta t} + k(T_{100} - T_0). \quad (2)$$

Тепер дамо відповідь на перше питання задачі. Коли чайник автоматично вимикається кипіння ще продовжується ($t_1 = 15 \text{ c}$). Цей час енергія на підтримання кипіння та теплові втрати йде від нагрівального елемента, температура якого більша за $T_{100} = 100^\circ\text{C}$. За умовою, кількість води, що випаровувалась в одиницю часу, рівномірно зменшується з початкового значення

$\frac{\Delta m_b}{\Delta t}$ до нуля. Отже, візьмемо середнє значення $\frac{1}{2} \frac{\Delta m_b}{\Delta t}$ і запишемо рівняння теплового балансу:

$$cm(T_x - T_{100}) = \frac{1}{2} L \frac{\Delta m_b}{\Delta t} t_1 + k(T_{100} - T_0)t_1 \quad (3).$$

На етапі охолодження на $\Delta T = T_{100} - T_{99} = 1^\circ\text{C}$ за час $t_2 = 30 \text{ c}$, різниця температур $T_{100} - T_0$ змінюється на дуже малий відсоток (температура навколишнього середовища T_0 значно менша за $T_{100} = 100^\circ\text{C}$), тому вважатимемо потужність теплових втрат сталою. Рівняння теплового балансу під час охолодження:

$$c_b m_b \Delta T + cm \Delta T = k(T_{100} - T_0)t_2. \quad (4)$$

З рівняння (4) виражаємо коефіцієнт k , з рівняння (2) – $\frac{\Delta m_b}{\Delta t}$ і підставляємо

в рівняння (3): $cm(T_H - T_{100}) = \frac{1}{2} P t_1 + \frac{1}{2} \frac{t_1}{t_2} (c_b m_b + cm) \Delta T \quad (5)$, звідки й знаходимо, що

$$T_H = \frac{P t_1 + t_1 (c_b m_b + cm) \Delta T}{2 t_2 cm} + T_{100}; \quad T_H \approx 260^\circ\text{C}. \quad (6)$$

З рівняння (1) корисна кількість теплоти $c_b m_b (T_2 - T_1)$, а витрачена $P\Delta t$.

Отже ККД $\eta = \frac{c_b m_b (T_2 - T_1)}{P\Delta t}$ або з урахуванням рівняння теплового балансу:

$$\eta = \frac{P\Delta t - k(T - T_0)\Delta t}{P\Delta t} = 1 - \frac{k}{P}(T - T_0). \quad (7)$$

Виходить, що зі збільшенням температури, ККД зменшується за рахунок збільшення теплових втрат. Якщо у чайник налити холодну воду, температура якої нижча за температуру навколишнього повітря, ККД, згідно з фор-

мулою (1), на початку нагріву може виявитись навіть більшим за одиницю. Це пов'язано з тим, що теплообмін з навколишнім середовищем призведе не до втрати теплоти, а до її «придбання»: разом вода отримає більше енергії, ніж їй передасть нагрівальний елемент.

Також коефіцієнт k з рівняння (4) підставимо у вираз для ККД при

$$T_{100} \approx 100^\circ\text{C}: \eta = 1 - \frac{k}{P}(T_{100} - T_0) = 1 - \frac{(c_B m_B + cm)\Delta T}{Pt_2} = \frac{557}{6}\% \approx 93\%.$$

Зазначимо, що даний ККД дещо завищений, оскільки ми не враховували нагрівання самого чайника, а також те, що під час нагрівання, особливо за високих температур, вода, хоча й не кипить, досить інтенсивно випаровується.

Отже, реальний ККД має бути дещо нижчим за 93%.

Задача 9.2

За формулою лінзи визначимо відстань від зображення B_1 до лінзи (очевидно, що зображення точки А отримаємо у точці подвійної фокусної відстані $2F$ справа від лінзи).

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F}, \quad f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F}, \quad f_1 = \frac{2,5F \cdot F}{2,5F - F} = \frac{2,5F}{1,5} = \frac{5}{3}F.$$

Аналогічно розрахуємо положення зображення палички АВ (точки А і В) в момент часу, коли точка В кінця палички досягне подвійної фокусної відстані.

Зауважимо, що зображення точки В буде у точці подвійної фокусної відстані справа від лінзи.

Зображення точки А правого кінця палички: $AB = 2,5F - 2F = 0,5F$, $d_2 = 1,5F$, $\frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F}$; $f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F}$, $f_1 = \frac{1,5F \cdot F}{1,5F - F} = \frac{1,5F}{0,5} = 3F$.

Час руху палички буде рівний $t = \frac{0,5F}{v}$.

Відстань, яку пройде зображення точки А за цей час, $l_A = 3F - 2F = F$,

середня швидкість руху точки А $v_A = \frac{l_A}{t} = \frac{l_A \cdot v}{0,5F} = 2v$.

Відстань, пройдена зображенням точки В за цей самий час, –

$$l_B = 2F - f_1 = 2F - \frac{5}{3}F = \frac{1}{3}F.$$

Середня швидкість руху зображення точки В упродовж визначеного часу –

$$v_B = \frac{l_B}{t} = \frac{1/3F}{0,5F} v = \frac{2}{3} v. \text{ Відношення середніх швидкостей руху зображень}$$

$$\text{точок А і В рівне } \frac{v_A}{v_B} = \frac{2v}{2/3v} = 3. \text{ Відношення розмірів зображення палички}$$

$$\text{в кінцевий момент часу до розмірів скляної палички} - \frac{A_2 B_2}{AB} = \frac{F}{0,5F} = 2.$$

Задача 9.3

Перш за все зазначимо, що напруга джерела струму є сталою (в обох випадках $U = U_2 + U_4 = 5\text{ В}$). Коли ключ розімкнено, маємо незбалансований міст. На мал. наведено його еквівалентну схему.

Із другого правила Кірхгофа отримаємо напругу на вольтметрі V_3 ($U_3 = 1\text{ В}$). Застосовуючи тепер перше правило

$$\text{Кірхгофа до вузла А кола, отримаємо співвідношення } \frac{U_2}{r_2} = \frac{U_3}{r_3} + \frac{U_4}{r_4}, \text{ звідки}$$

$$\text{отримуємо } r_4 = \frac{3r_2 r_3}{2r_3 - r_2}.$$

Після замикання ключа еквівалентна схема кола має вигляд, показаний на мал.

Тепер відношення напруг U_2 до U_4 дорівнює відношенню опору ділянки кола V_2 з V_3 до опору вольметра V_4 :

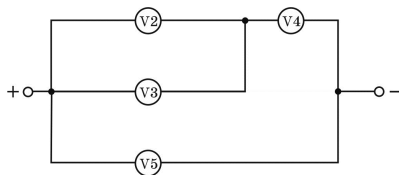
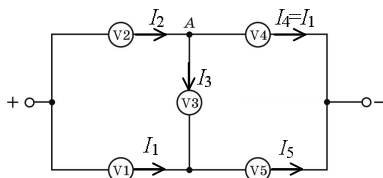
$$\frac{1}{4} = \frac{r_2 r_3}{r_4 (r_2 + r_3)}.$$

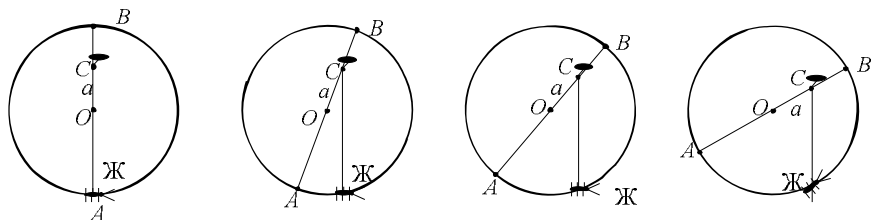
Підставивши вираз для r_4 , отримаємо $r_3 = 1,4r_2$. Звідси $r_4 = 7r_2/3$. За умовою, таким самим є й опір вольметра V_1 , а саме: $r_1 = r_4 = 7r_2/3$.

Задача 9.4

1) Оскільки, жук набагато важчий за диск, то при русі він весь час залишається під точкою підвісу. Тому в нерухомій системі координат його рух являє собою піднімання вертикальною лінією вгору (мал. 1).

Такий рух виникає як результат двох рухів: зміщення жука по краю диска і обертання диска відносно точки підвісу.





Мал. 1

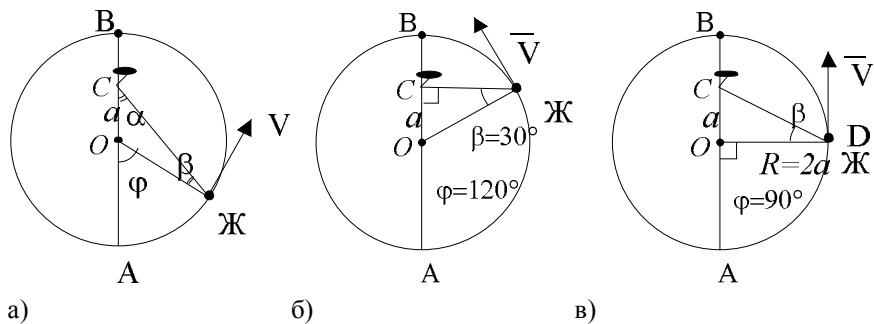
2) В системі відліку, яка пов'язана з диском, все вище зазначене можна представити у вигляді, що точки О і С залишаються на місці, жук повзе вздовж краю диска, а «вертикальна» лінія СЖ (точка підвісу С – жук Ж) обертається відносно точки С (мал. 2, а).

Швидкість жука у нерухомій системі координат u – це швидкість скорочення лінії СЖ (точка підвісу С – жук Ж). Вона дорівнює

$$u = V \cos(90^\circ - \beta) = V \sin \beta = \frac{a}{R} \cdot V \sin \alpha.$$

Пояснення: перпендикулярна відрізка СЖ складова швидкості жука на довжину відрізка СЖ не впливає; перехід до кута α виконаємо за допомогою

теорему синусів $\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}.$



Мал. 2

Отримаємо розв'язки:

а) Максимальна швидкість жука у нерухомій системі відліку становитиме

$$(\sin \alpha = 1): u_{\max} = \frac{a}{R} \cdot V = 6 \text{ мм/хв.}$$

б) Коли кут $\alpha = \pi/2$, кут $\varphi = 120^\circ$ (мал. 2, б), а довжина пройденого жуком шляху дорівнюватиме третині кола $S = \frac{2\pi R}{3}$. Звідси отримаємо відповідь

для часу: $t = S/V = \frac{2\pi R}{3V} = 14 \text{ хв.}$

в) Коли жук проповзе половину шляху і опиниться у точці D (мал. 2, в), для $\sin \beta$ будемо мати $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Звідси отримаємо:

$u = V \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot V = 5,4 \text{ мм/хв.}$

Задача 9.5

Висновки з першого досліду:

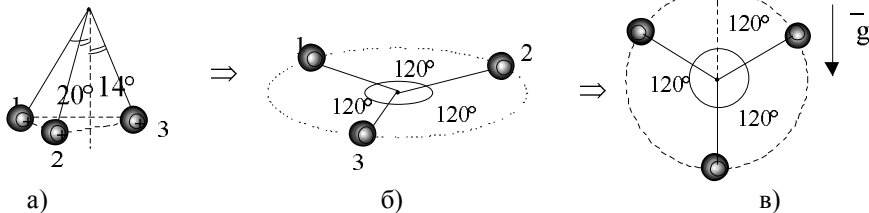
- 1) оскільки розміри провідних кульок однакові, то заряд між ними поділиться на три рівні частини;
- 2) перша та друга кулька мають однакові маси;
- 3) третя кулька масивніша за першу та другу;
- 4) кулонівські сили, що діють між кульками, та сили тяжіння, що діють на них, мають однаковий порядок величини.

Що зміниться при збільшенні первинного заряду у 2014 разів?

1) Кулонівські сили збільшаться у $2014^2 = 4\,056\,196$ разів! Отже, навіть якщо відстань між кульками зросте у 4 рази (з 0,5l до 2l), то все одне кулонівські сили будуть у 250 000 разів більші за сили тяжіння!

2) Це значить, що ми можемо у першому наближенні вважати, що між кульками діють тільки кулонівські сили. Які положення вони при цьому займуть?

Звичайно, вони утворять конфігурацію, при якій знаходитимуться якомога далі одна від одної, тобто вони знаходитимуться у вершинах правильного трикутника (мал. б).



У цієї системи (із зарядами, що «жорстко» закріплені у вершинах правильного трикутника) залишаються три ступені свободи – вона може обертатися. «Включимо» силу тяжіння, і тоді система повернеться так, щоб її центр ваги був якомога нижче. А це значить, що третя, наймасивніша, кулька розміститься знизу, а перша та друга кульки займуть симетричні положення (див. мал. в).

10 клас

Задача 10.1

З рівняння Менделєєва–Клапейрона знаходимо, що максимальна маса газу $m = \frac{\mu PV}{RT}$

буде при максимальному значенні добутку PV і мінімальному значенні температури T .

Залежність $P(V)$ при будь-яких сталих значеннях температури (включно з $T_{\min} = 100\text{K}$)

має у запропонованому масштабі вигляд кола (див. мал.). У безрозмірних координатах

$x = V/V_{\min} = V/1\text{ л}$, $y = P/P_{\min} = P/1\text{ кПа}$ рів-

няння кола має вигляд $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ (1), а рівняння Менделєєва–

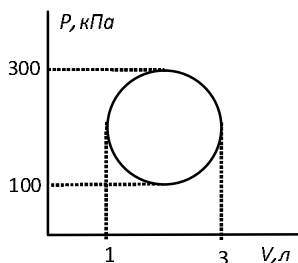
Клапейрона: $yx = \frac{mRT}{\mu P_{\min} V_{\min}}$ (2).

Знайти максимальне значення добутку yx можна по-різному. Наприклад, виразити y з рівняння (1), підставити в yx , взяти похідну, значення якої в точці максимуму дорівнює нулю. Можна обійтися і без похідної. Зауважимо, що лінії сталої маси (ізомаси) у випадку $T = \text{Const}$ на діаграмі

$P(V)$ мають вигляд гіпербол $P = \frac{mRT}{\mu} \frac{1}{V}$, аналогічно, вигляду ізо терм у ви-

падку $m = \text{const}$. Більшій масі відповідає більш «висока» гіпербола. Найвища гіпербола не перетинатиме коло у двох точках, а тільки дотикатиметься до нього (див. мал.). Отже, слід розв'язати систему рівнянь, а саме рівняння кола (1) та гіперболи (2), і обрати випадок, коли рівняння за даної маси газу і температури має один розв'язок. Можна зробити ще простіше. Оскільки система рівнянь (1) і (2) є симетричною відносно заміни $x \leftrightarrow y$ і має один розв'язок, для нього $x = y$. З урахуванням цього з рівняння (1) для нашого

випадку знаходимо $y = x = 2 \pm \sqrt{2}/2$. Перше значення $2 + \sqrt{2}/2$ відповідає максимальному значенню добутку yx , друге $2 - \sqrt{2}/2$ – мінімальному.



Отже, $\frac{mRT}{\mu P_{\min} V_{\min}} = yx|_{\max} = \left(2 + \sqrt{2}/2\right)^2 = 4,5 + 2\sqrt{2} \approx 7,33$, звідки знаходи-

$$\text{мо } m_{\max} = 7,33 \frac{\mu P_{\min} V_{\min}}{RT_{\min}} \approx 3,5 \text{ г.}$$

$$\text{Для мінімальної маси } m_{\min} = \left(2 - \sqrt{2}/2\right)^2 \frac{\mu P_{\min} V_{\min}}{RT_{\max}} \approx 0,27 \text{ г.}$$

Оскільки тиск може змінюватися від $P_{\min}=100$ кПа до $P_{\max}=300$ кПа, то відповідна маса вантажу, який завдяки силі тяжіння стискає газ під поршнем, може змінюватися від $(P_{\min} - P_A)S/g = 0$ кг до $(P_{\max} - P_A)S/g = 200$ кг.

Для того, аби знайти роботу по підніманню вантажу, не потрібно знати формулу для розрахунку роботи газу, як може здаватися на перший погляд. Корисна робота йде на збільшення потенціальної енергії вантажу

$$mg \cdot h = (P - P_A)S \cdot \frac{V_2 - V_1}{S} = (P - P_A) \cdot (V_2 - V_1) \quad (\text{нам не потрібно враховувати}$$

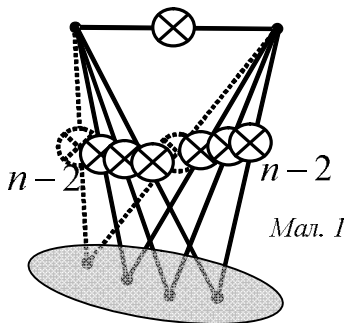
роботу газу проти сил атмосферного тиску, адже мова йде про корисну роботу по підніманню вантажу)

Числові розрахунки дають $y = 2,5$ (відповідає масі вантажу 150 кг)

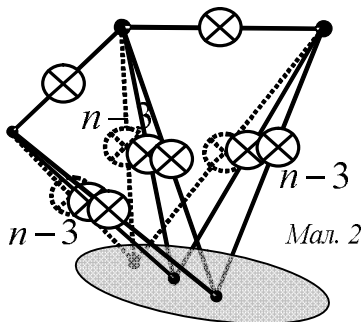
$$A = 1,5\sqrt{3}P_{\min}V_{\min} \approx 260 \text{ Дж.}$$

Задача 10.2

Відразу розглянемо загальний випадок. Кожна з n клем з'єднана лампочками з іншими $n-1$ клемми. Отже, усього $n(n-1)/2$ лампочок у гірлянді. Лампочка, що безпосередньо з'єднує клему, до яких підведена напруга 220 В, горітиме на повну потужність. Інші лампочки можна умовно розділити на три групи: $n-2$ лампочки, що безпосередньо підходять до першої клему, $n-2$ лампочки, що безпосередньо підходять до другої клему, і всі інші, які з'єднують $n-2$ клему між собою. В силу симетрії задачі всі ці $n-2$ клему рівноправні. Отже, вони мають однаковий потенціал і струм між ними не йтиме, а відповідні лампочки не горітимуть. На мал. 1 наведено схематичне зо-



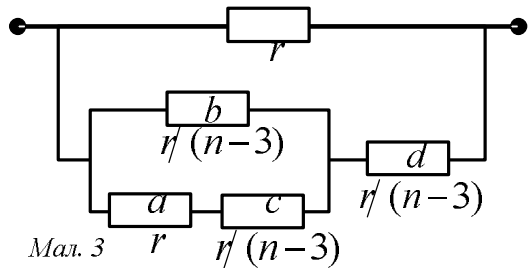
Мал. 1



Мал. 2

браження даного з'єднання. Можна вважати, що лампочки двох перших груп попарно послідовно з'єднані, а можна – що послідовно з'єднані дві паралельні групи, на відповідь це не вплине. Напруга на кожній з цих лампочок удвічі менша за $U = 220 \text{ В}$. Тоді потужність буде меншою у чотири рази. Висновок: одна лампочка споживає $4,9 \text{ Вт}$, $2(n-2)$ лампочки – по $1,225 \text{ Вт}$. Всі інші $(n-2)(n-3)/2$ лампочки не горітимуть. Розглянемо випадок, коли перегорить одна лампочка. Жодна з $(n-2)(n-3)/2$ лампочок із зони, тонованої на мал. 1, перегоріти не може, оскільки струм нею не йде. Якщо перегорить лампочка, що безпосередньо з'єднує клема, до яких підведена напруга, нічого для інших лампочок не зміниться, оскільки вона підключена паралельно. Ситуація зміниться тільки тоді, коли перегорить одна з $2(n-2)$ лампочок. Причому яка саме, значення немає.

На мал. 2 наведено схематичне зображення нового з'єднання. Знову клема у тонованій зоні рівноправні (тепер їх уже $n-3$). Струм між ними йти не буде, відповідні $(n-3)(n-4)/2$ лампочок не горітимуть. Зазначимо, що навіть якщо ми враховували залежність температури від опору, мал. 2 не змінився би. Зобразимо еквівалентну схему отриманого з'єднання (див. мал. 3).



Мал. 3

Зобразимо еквівалентну схему отриманого з'єднання (див. мал. 3). Опір однієї лампочки

$r = \frac{U^2}{P}$. Верхня лампочка споживає повну потужність. Загальний опір

нижньої частини схеми $R_{abcd} = \frac{2n-3}{n-1} \frac{r}{n-3}$. Отже, через неї йтиме струм

$I_{abcd} = I_d = \frac{U}{R_{abcd}} = \frac{(n-1)(n-3)}{2n-3} \frac{U}{r}$. Потужність, що виділятиметься на кож-

ному з $n-3$ резисторів, які безпосередньо з'єднанні з правим контактом

(ділянка d) – $P_d = \left(\frac{n-1}{2n-3} \right)^2 \frac{U^2}{r}$. У випадку $n = 5$, $P_d = \frac{16}{49} \frac{U^2}{r}$, напруга на

ділянці abc : $U_{abc} = U_{ac} = U_b = \frac{n-2}{2n-3} U$. Отже, потужність, що виділяється на

кожному з $n-3$ резисторів ділянки b , – $P_b = \left(\frac{n-2}{2n-3} \right)^2 \frac{U^2}{r}$. Аналогічно зна-

ходимо потужність кожного з $n-3$ резисторів ділянки c : $P_c = \frac{1}{(2n-3)^2} \frac{U^2}{r}$,

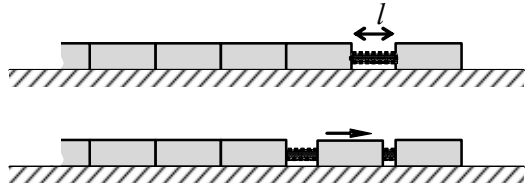
а також потужність резистору a : $P_a = \left(\frac{n-3}{2n-3} \right)^2 \frac{U^2}{r}$. У випадку $n=5$ поту-

жності, які випромінюватимуть лампочки, — $P_a = \frac{4}{49} P = 0,4 \text{ Вт}$,

$P_b = \frac{9}{49} P = 0,9 \text{ Вт}$, $P_c = \frac{1}{49} P = 0,1 \text{ Вт}$, $P_d = \frac{16}{49} P = 1,6 \text{ Вт}$, і, звичайно, потужність лампочки, що безпосередньо з'єднана з джерелом напруги, — $4,9 \text{ Вт}$.

Задача 10.3

Зрозуміло, що гусениця може рухатись з якою завгодно малою швидкістю. Отже, слід знайти максимальну швидкість її руху. Під час такого руху гусениця повинна зміщувати свій модуль на відстань l за найкоротший час Δt .



Але сила, з якою гусениця розганяє свій модуль, має обмеження, оскільки за третім законом Ньютона сила протидії може зсунути інші модулі з місця, що суперечить умові задачі. У граничному випадку гусениця половину часу розганяє модуль з максимально можливим прискоренням a , а половину часу з цим же прискоренням гальмує. Скористаємось другим законом Ньютона для модуля

$\frac{1}{n}ma = F - \frac{1}{n}\mu mg$ і для гусениці без модуля: $F = \frac{n-1}{n}\mu mg$. Знаходимо мак-

симальне прискорення: $a = (n-2)\mu g$. Тоді час пересування одного модуля

$\Delta t = 2\sqrt{\frac{l}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{(n-2)\mu g}}$. Час пересування всієї гусениці на відстань l буде

в n разів більшим. Максимальна швидкість гусениці

$v = \frac{l}{n\Delta t} = \frac{1}{2n}\sqrt{(n-2)\mu gl} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\mu gl}$. Максимальна швидкість зале-

жить від кількості частин n . Виділивши повний квадрат, знайдемо n най-прудкішої гусениці. Швидкість

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \mu g l} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\right)^2\right) \mu g l}$$

набуває найменшого значення, коли вираз у квадраті дорівнює нулю, а саме, коли $n = 4$. Швидкість гусениці з чотирьох модулів $v_{\max} = \sqrt{\mu g l / 32} = 5 \text{ см/с}$. Звичайно, дану відповідь можна було отримати, знайшовши екстремум за допомогою похідної.

Виявляється, що без ніг, коліс або реактивного двигуна можна доволі швидко рухатись, граючись з силами тертя, що діють на різні частини тіла.

Максимальний кут, під яким гусениця може рухатись вгору вздовж похилої площини, буде у тому випадку, коли прискорення її частини прямує до нуля. Зовнішні сили, що діють на всю гусеницю, – це сила тяжіння mg ,

сили реакції опори на більшу частину гусениці $\frac{n-1}{n} mg \cos \alpha$ та на один

модуль $\frac{1}{n} mg \cos \alpha$ та сили тертя $F_{n-1} = \frac{n-1}{n} \mu mg \cos \alpha$, $F_1 = \frac{1}{n} \mu mg \cos \alpha$

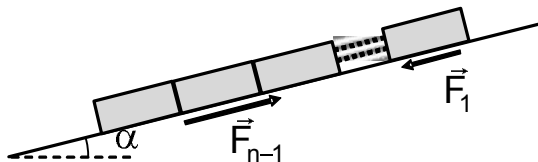
(див. мал.). Проекція сил на напрям руху дає:

$$0 = mg \sin \alpha - F_{n-1} + F_1 = mg \sin \alpha - \frac{n-1}{n} \mu mg \cos \alpha + \frac{1}{n} \mu mg \cos \alpha.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n-2}{n} \mu.$$

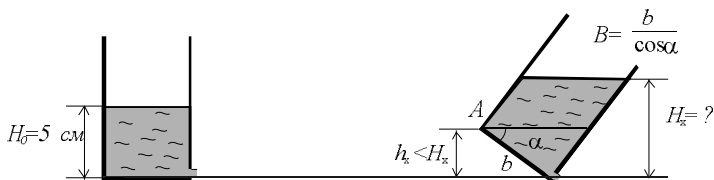
Отже, гусениця з двох модулів рухатись вгору не зможе (як і поступально рухатись горизонтально). Максимальний кут нахилу ($\operatorname{tg} \alpha = \mu$) відповідає гусениці з дуже великою кількістю модулів ($n \rightarrow \infty$).



Задача 10.4

Знайдемо висоту рівня води в посудині після її нахилу. Для цього скористаємося постійністю об'єму рідини (див. мал.): $H_0 b^2 = H_x B b - \frac{1}{2} B b^2 \sin \alpha$.

Тут $H_0 = 5 \text{ см}$ – висота рівня води в «прямій» посудині до її нахилу, b – розмір сторони опори посудини, $B = \frac{b}{\cos \alpha}$ – поперечний розмір верхні води в нахиленій посудині.



Звідси отримуємо: $H_x = H_0 \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} b \sin \alpha = 7 \text{ см.}$

Перевіримо, чи малюнок відповідає реальній ситуації, тобто що рівень води в похилій посудині і на початку і в кінці виміру не нижче точки А:

$$h_x = b \sin \alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ см} \leq H(t).$$

Швидкість витікання води з отвору в нахиленій посудині залежить тільки від висоти рівня води над отвором. Видно, що вихідна задача про витікання води і кінцева задача повністю еквівалентні. Різниця полягає лише в тому, що «ефективний» переріз посудини став більшим у 5/4 рази:

$$S_{\text{нах}} / S_0 = Bb / b^2 = 1 / \cos \alpha = 5 / 4.$$

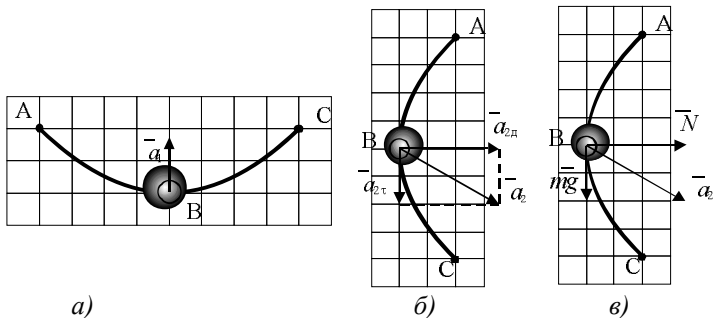
Отже, нам треба дізнатися, за який час рівень води в нахиленій посудині знизиться з 7 см до 6 см. Для «прямої» посудини таблиця дає $\Delta t_{\text{прям}} = t(6 \text{ см}) - t(7 \text{ см}) = 21,2 \text{ с.}$

Для похилої посудини час виливання буде в 5/4 рази більше:

$$\Delta t_{\text{нах}} = \frac{S_{\text{нах}}}{S_0} \Delta t_{\text{прям}} = \frac{1}{\cos \alpha} [t(6 \text{ см}) - t(7 \text{ см})] = \frac{5}{4} \cdot 21,2 \text{ с} = 26,5 \text{ с.}$$

Задача 10.5

У першому випадку бусинка в точці В буде мати тільки доцентрове прискорення, яке спрямоване вгору до центру кривизни $a_1 = \frac{v_1^2}{R}$, $v_1^2 = 2gh_1$, де $h_1 = 2 \text{ клітинки}$ – перепад висот між точкою А і В.



У другому випадку в точці В бусинка матиме вже дві складові прискорення: горизонтальну (доцентрову) $a_{2д}$ і вертикальну (тангенціальну) $a_{2τ}$ (див. мал. б). Першу складову ми знаходимо за формулою

$$a_{2д} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gh_2}{R} = 2a_1 = 2g, \text{ де } h_2 = 4 \text{ клітинки. Вертикальну складову прискорення } a_{2τ} \text{ знаходимо з другого закону Ньютона } m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \text{ (див. мал. в).}$$

Проектуючи його на вертикальну вісь, отримуємо $a_{2τ} = g$. Тоді повне прискорення:

$$a_2 = \sqrt{a_{2τ}^2 + a_{2д}^2} = \sqrt{g^2 + 4g^2} = \sqrt{5}g = 22,4 \text{ м/с}^2.$$

11 клас

Задача 11.1

При відстанях порядку 1 а. о. впливом Землі на рух астероїда нехтуємо, значить, траєкторія астероїда – еліпс, в фокусі якого Сонце. Застосуємо закони збереження енергії E і моменту імпульсу L для точок максимального наближення і віддалення астероїда від Сонця

$$\begin{cases} E = \frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{GmM}{0,5R} = \frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{GmM}{1,5R}, \\ L = mv_{\max} \cdot 0,5R = mv_{\min} \cdot 1,5R = mv_r r, \end{cases}$$

де: M – маса Сонця, $R = 1$ а. о. – радіус земної орбіти. Розв'язуючи систему,

знаходимо швидкості: $v_{\max} = 3v_{\min} = \sqrt{\frac{3GM}{R}}$, а також повну енергію

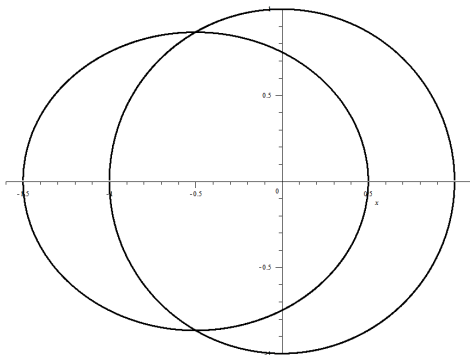
$$E = -\frac{GmM}{2R} \text{ і момент імпульсу}$$

$$L = \frac{m}{2}\sqrt{3GMR} \text{ астероїда. Для}$$

побудови еліпса розглянемо точки його перетину з земною орбітою. Із закону збереження

$$\text{енергії } \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}$$

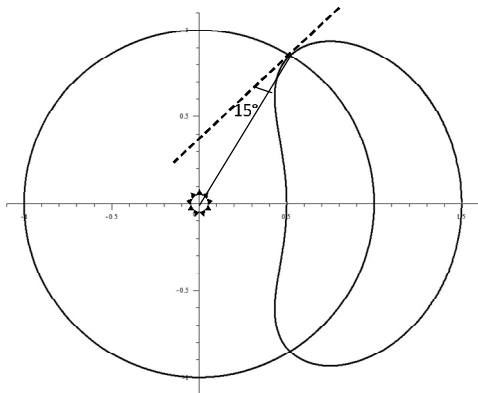
знаходимо, що швидкість астероїда v_0 на відстані $r = R$ від



Сонця дорівнює швидкості орбітального руху Землі $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Із закону

збереження моменту імпульсу $mv_{\tau}R = \frac{m}{2}\sqrt{3GMR}$ знаходимо, що в момент перетину земної орбіти тангенціальна складова (перпендикулярна до напрямку на Сонце) швидкості астероїда $v_{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ або $v_{\tau} = v_0 \cos 30^{\circ}$. Таким чином, траєкторії Землі і астероїда перетинаються під кутом 30° .

Оскільки періоди Землі і астероїда рівні (це впливає з третього закону Кеплера), досить намалювати траєкторію за один період, після чого взаємне положення небесних тіл повторюється. При побудові траєкторії слід звернути увагу на точки перетину орбітою астероїда орбіти Землі. Як було показано раніше, в інерціальній системі відліку швидкості тіл однакові, а кут між швидкостями 30° . Із закону додавання швидкостей випливає, що відносна швидкість астероїда в цих точках буде спрямована вздовж лінії, що утворює кут 15° в напрямку на Сонце.



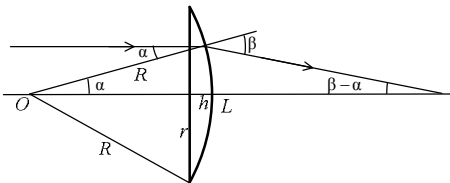
На малюнку зображена траєкторія астероїда в неінерціальній системі відліку.

Задача 11.2

Згідно з малюнком в умові пучок світла падає на всю плоску поверхню лінзи. Освітленим треба вважати ту частину головної оптичної осі, точки якої перетинають щонайменше два променя, на що вказує умова: «...паралельний пучок після проходження лінзи в одній точці не збирається, а освітлює деякий об'єм біля фокусу». Тобто, ця частина оптичної осі освітлена збоку.

Знайдемо відстань L від центру сферичної поверхні (точка O) до перетину головної оптичної вісі довільним заломленим променем (див. мал.).

Для цього скористаємось теоремою синусів для трикутника,



утвореного відрізком головної оптичної осі довжиною L , радіусом сферичної поверхні R і заломленим променем: $\frac{L}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{R}{\sin(\beta - \alpha)}$. Звідси

$L = \frac{R \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{R \sin \beta}{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}$, де кут заломлення β виражаємо із закону заломлення світла на сферичній поверхні $\sin \beta = n \sin \alpha$. Отже

$$\begin{aligned} L &= \frac{R n \sin \alpha}{n \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{R n}{n \cos \alpha - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{R n (n \cos \alpha + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha})}{n^2 \cos^2 \alpha - (1 - n^2 \sin^2 \alpha)} = \frac{R n}{n^2 - 1} (n \cos \alpha + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}). \end{aligned}$$

Зі збільшенням кута α кожний з двох доданків в останньому виразі монотонно зменшується. Найбільшою відстань L буде для променя, який проходить поряд з головною оптичною віссю і для якого $\alpha = 0$ (див. мал.):

$$L_{\max} = L|_{\alpha=0} = \frac{R n}{n^2 - 1} (n + 1) = \frac{R n}{n - 1}.$$

Найменшою відстань L буде для променя, який заломлюється на краю лінзи і для якого $\sin \alpha = r/R$: $L_{\min} = L|_{\sin \alpha = \frac{r}{R}} = \frac{R n}{n^2 - 1} \left(n \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} + \sqrt{1 - n^2 \frac{r^2}{R^2}} \right)$

Скористаємось тим, що за умовою лінза тонка, тобто $r/R \ll 1$. Можна відразу записати наближені значення коренів, можна спочатку виділити повні квадрати і знехтувати зовсім малими величинами $(r/R)^4$. У будь-

якому разі отримуємо
$$L_{\min} = \frac{R n}{n - 1} - \left(1 - \frac{n r^2}{2 R^2} \right).$$

Радіус сфери R визначимо з теореми Піфагора для прямокутного трикутника (див. мал.): $R^2 = (R - h)^2 + r^2$, $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$.

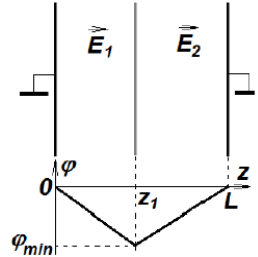
Довжина відрізка головної оптичної осі, що виявиться засвіченою (її перетинатимуть заломлені промені) $\Delta L = L_{\max} - L_{\min} = \frac{n^2 h}{n - 1}$ (при $h \gg r$).

Для скла з показником заломлення $n = 1,5$ це відстань $\Delta L = 4,5h = 11,25$ мм. Більш ніж на 1 см розтягнулося вздовж головної оптичної осі зображення нескінченно віддаленої точки (так можна інтерпретувати утворення пучка паралельних променів, що падають на лінзу). Якщо на-

малювати заломлені промені після проходження лінзи, у просторі з'явиться об'єм перетину променів, який матиме ще більші лінійні розміри. Це явище має назву сферичної аберації і пов'язане з певною недосконалістю сферичних поверхонь для фокусування променів. Зазначимо, що ΔL не залежить від радіуса лінзи, але залежить від показника заломлення. Розв'язуючи рівняння $\Delta L'(n) = 0$, знаходимо $n = 2$ (досить реалістичний показник заломлення) і $\Delta L_{\min} = 4h = 1 \text{ см}$.

Задача 11.3

Нехай у деякий момент часу заряджена площина знаходиться в точці $z = z_1$ (мал.1). Оскільки провідні поверхні заземлені, електричне поле не може виходити за межі міжелектродного проміжку. Це означає, що сума густин поверхневих зарядів σ_1 та σ_2 на лівій та правій пластинах дорівнюватиме поверхневому заряду площини з протилежним знаком: $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. (1) Тоді ліву і праву частини системи можна розглядати як конденсатори з поверхневими густинами зарядів σ_1 та σ_2 і віддальми між пластинами z_1 та $L - z_1$, причому напруги на конденсаторах однакові за величиною і протилежні за знаком. Таким чином: $E_1 z_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} z_1 = E_2 (L - z_1) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} (L - z_1) = U$. (2)



З рівнянь (1)–(2) знаходимо, що

$$\sigma_1 = \sigma \left(1 - \frac{z_1}{L} \right), \quad \sigma_2 = \sigma \frac{z_1}{L}, \quad U = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z_1}{L} \right). \quad (3)$$

Сумарна енергія конденсаторів на одиницю площі поверхні складає величину $W = (C_1 + C_2)U^2 / 2$, де $C_{1,2}$, – ємності на одиницю площі поверхні:

$$C_1 = -\frac{\epsilon_0}{z_1}, \quad C_2 = -\frac{\epsilon_0}{L - z_1}. \quad (4) \text{ Таким чином:}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{L - z_1} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{z_1 (L - z_1)^2}{L} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0 L} z_1 (L - z_1) \quad (5)$$

Енергія системи на одиницю поверхні записана як добуток двох співмножників, сума яких стала. Отже, вона досягає максимуму, коли $z_1 = L/2$

$$W_{\max} = \frac{\sigma^2 L}{8\epsilon_0} \quad (6) \quad (\min \text{ при } z_1 \rightarrow 0, W_{\min} = 0).$$

Очевидно, заряджена площина зможе долетіти до протилежного кінця міжелектродного проміжку лише в тому випадку, коли її початкова кінетична енергія (на одиницю площі) перевищує значення (6):

$$\frac{\rho V^2}{2} > \frac{\sigma^2 L}{8\epsilon_0} \quad (7) \quad \text{або} \quad V_0 > \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{L}{\rho\epsilon_0}}. \quad (8)$$

Задача 11.4

Магнітне поле будемо вважати аксіально-симетричним (див. мал. 1). Розкладемо індукцію магнітного поля в області траєкторії протона на складові: уздовж вісі поля – $B_{\parallel}$ і перпендикулярно до вісі поля $B_{\perp}$. Позначимо складові швидкості протона уздовж вісі $v_{\parallel}$, перпендикулярно до вісі $v_{\perp}$ ($v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$).

Силу Лоренца (для точки A), що діє на протон, розкладемо на складові:

$$F_{\perp} = qv_{\perp}B_{\parallel};$$

$F_{\parallel} = qv_{\perp}B_{\perp}; \quad F_A = qv_{\perp}B_{\perp}$ (F_A – напрямлена перпендикулярно площині малюнка, до нас) (це справедливо для будь-якої точки траєкторії).

Запишемо другий закон Ньютона:

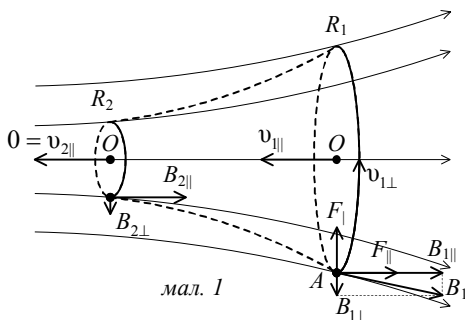
$$\text{для руху по колу: } F_{\perp} = mv_{\perp}^2 / R = qv_{\perp}B_{\parallel} \Rightarrow R = mv_{\perp} / (qB_{\parallel}); \quad (1)$$

$$\text{для напрямку } v_{\parallel} \text{ (уздовж вісі): } F_{\parallel} dt = qv_{\perp}B_{\perp} dt = -mdv_{\parallel}; \quad (2)$$

$$\text{для напрямку } v_{\perp} \text{ (уздовж руху протона): } F_A dt = qv_{\perp}B_{\perp} dt = mdv_{\perp}. \quad (3)$$

З рівнянь (2) і (3) отримаємо: $v_{\perp} / v_{\parallel} = -dv_{\parallel} / dv_{\perp} \Rightarrow dv_{\perp}^2 = -dv_{\parallel}^2 \Rightarrow \Delta v_{\perp}^2 = -\Delta v_{\parallel}^2$, тобто: на скільки збільшується квадрат складової швидкості по напрямку $v_{\perp}$, на стільки ж зменшується квадрат складової швидкості по напрямку $v_{\parallel}$. $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = (v_{\parallel}^2 + \Delta v_{\parallel}^2) + (v_{\perp}^2 + \Delta v_{\perp}^2) \Rightarrow$

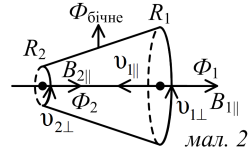
Модуль швидкості частинки підчас руху зберігається ($v = \text{const}$). Запишемо цей висновок для початкового моменту $v_1^2 = v_{\parallel 1}^2 + v_{\perp 1}^2$ і моменту відбивання частинки від області поля B_2 (в цей момент $v_{2\parallel} = 0$) $v_{\perp 1}^2 + v_{\parallel 1}^2 = v_{2\perp}^2 \Rightarrow v_{\parallel 1}^2 / v_{\perp 1}^2 = v_{2\perp}^2 / v_{\perp 1}^2 - 1 \Rightarrow v_{\parallel 1} / v_{\perp 1} = \sqrt{v_{2\perp}^2 / v_{\perp 1}^2 - 1}$. (4)



Запишемо закон зміни моменту імпульсу протона відносно вісі симетрії поля (OO).

$\sum M_{OO} = F_A R dt = dL = q v_{\parallel} B_{\perp} R dt = (q / 2\pi) B_{\perp} \pi 2 R v dt = (q / 2\pi) B_{\perp} dS_{\parallel} =$
 $= (q / 2\pi) d\Phi_{\text{бічне}} \Rightarrow \Delta L = (q / 2\pi) \Phi_{\text{бічне}} \quad (5).$ $\Phi_{\text{бічне}}$ – потік індукції магнітного поля через бічну поверхню замкнутої тривимірної поверхні утвореної кругом R_1 (на вході частинки в поле), кругом R_2 (момент відбивання протона від поля B_2) і бічною (довільною) поверхнею (див. мал. 2).

За теоремою Гауса для магнітного поля, потік індукції магнітного поля крізь замкнуту тривимірну поверхню дорівнює нулю (магнітне поле вихрове).



$$\Phi_1 + \Phi_{\text{бічне}} - \Phi_2 = 0 \Rightarrow \Phi_{\text{бічне}} = \Phi_2 - \Phi_1 = B_{2\parallel} \pi R_2^2 - B_{1\parallel} \pi R_1^2 \quad (6).$$

$$(6) \rightarrow (5) \quad \Delta L = m v_{2\perp} R_2 - m v_{1\perp} R_1 = (q / 2\pi) d\Phi_{\text{бічне}} = (q / 2\pi) \pi (B_{2\parallel} R_2^2 - B_{1\parallel} R_1^2)$$

$$\text{Враховуючи, що: } R_1 = m v_{1\perp} / (q B_{1\parallel}), \quad R_2 = m v_{2\perp} / (q B_{2\parallel}),$$

$$\text{отримаємо: } v_{1\perp}^2 / v_{2\perp}^2 = B_{\parallel} / B_{2\parallel} \quad (7).$$

$$(7) \rightarrow (4): v_{\parallel} / v_{1\perp} = \sqrt{B_{2\parallel}^2 / B_{1\parallel}^2 - 1} \Rightarrow v_{\parallel} / v_{1\perp} < \sqrt{B_2^2 / B_1^2 - 1} = 3.$$

Задача 11.5

Рівняння руху кульки має вигляд $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}$. Звідси усталена швид-

кість падіння $\vec{u} = \frac{m\vec{g}}{k}$. Запишемо рівняння руху в проєкціях на осі координат (горизонтальну OX і напрямлену вертикально вгору OY):

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x = -k \frac{dx}{dt}, \quad (1) \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg - k v_y = -mg - k \frac{dy}{dt}. \quad (2) \quad \text{Інакше:}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{g}{u} v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{g}{u} v_y. \quad \text{Останнє рівняння можна переписати у ви-$$

гляді $\frac{d(u + v_y)}{dt} = -\frac{g}{u} (u + v_y)$. Таким чином, величини v_x і $u + v_y$ задовольняють одному й тому самому добре відомому диференціальному рівнянню. Отже, ці величини однаково залежать від часу (експоненціально зменшуються з однаковими показниками експоненти). Тому відношення цих величин лишається незмінним:

$$\frac{v_x}{v_y + u} = \frac{v_{0x}}{v_{0y} + u}. \quad (3)$$

У верхній точці траєкторії $v_x = v_1$, $v_y = 0$.

$$\text{Звідси } v_1 = \frac{uv_{0x}}{v_{0y} + u} = \frac{uv_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha + u} = 8,66 \text{ м/с.}$$

Повернемося до рівняння (2). Його можна переписати у вигляді $d(v_y + gt + \frac{g}{u}y) = 0$, звідки $v_y + gt + \frac{g}{u}y = \text{const.}$ (4)

Порівнюючи початковий і кінцевий моменти польоту (враховуючи, що $y = y_0$), отримаємо $v_y = v_{0y} - gt = -6 \text{ м/с}$. Із співвідношення (3) отримуємо

$$\text{значення } v_x \text{ в точці падіння: } v_x = \frac{v_{0x}(v_{0y} + u - gt)}{v_{0y} + u} = 3,46 \text{ м/с. Модуль швидко-}$$

$$\text{сті в момент падіння } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6,9 \text{ м/с.}$$

Повернемося тепер до рівняння (1) та перепишемо його у вигляді

$$d(v_x + \frac{g}{u}x) = 0. \text{ Звідси отримуємо } v_x + \frac{g}{u}x = \text{const} \text{ або } v_{0x} = v_x + \frac{g}{u}L. \text{ Таким}$$

$$\text{чином: } L = \frac{u(v_{0x} - v_x)}{g} = 14 \text{ м.}$$

Щоб відповісти на останнє запитання, зазначимо: час t_1 руху кульки по висхідній частині траєкторії **менший** від часу руху по низхідній частині. Це достатньо довести для тіла, яке кинули вертикально вгору (рівняння руху по двох осях незалежні). Очевидно, через втрати енергії на подолання опору повітря кулька проходить кожен малу ділянку траєкторії вниз повільніше, ніж угору. Тому рух униз триває **більше** часу. Таким чином, $t_1 < t/2$. Скорис-

таємося співвідношенням (4): $v_{0y} = gt_1 + \frac{g}{u}H$. Отже,

$$H = \frac{u}{g}(v_{0y} - gt_1) > \frac{u}{g}(v_{0y} - \frac{gt}{2}) = 2 \text{ м.}$$

Відповідь. 1) $v_1 = 8,66 \text{ м/с}$; 2) $v = 6,9 \text{ м/с}$; 3) $L = 14 \text{ м}$. Не може ($H > 2 \text{ м}$).

Науково-популярне видання

Міністерство освіти і науки України

*Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат
при Львівському національному університеті
імені Івана Франка*

“ЛІВЕНЯ–2014”

ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник

Уклав *А л е к с е й ч у к* Володимир Іванович

Редактор і коректор *Олександр Хміль*
Технічний редактор *Леся Пелехата*

Підписано до друку 16. 07. 2014.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк 2,21
Обл. вид. арк. 2,04 Наклад 20 000 прим.

Видавництво “Каменярь”: 79008, Львів, Підвальна, 3
Свідоцтво Держ. реєстру: серія ДК, № 462
Ел. адреса: vyd@kamenyar.com.ua

Віддруковано ТЗОВ “Видавничий Дім ІНБУК”
79070, Львів, Гната Хоткевича, 14/117

Оргкомітет конкурсу “Левеня – 2014”:

**Володимир Алексейчук,
Володимир Дзюбанський,
Борис Кременський,
Микола Петрунів,
Олена Хоменко.**

Адреса оргкомітету:

79054, Львів, вул. Караджича, 29
Львівський фізико-математичний ліцей
Тел./факс: (032) 240-17-02
E-mail: levenia.lviv@gmail.com
[http:// levenia.com.ua](http://levenia.com.ua)

Директор ліцею **Мар’ян Добосевич**

Благодійний фонд “Ліцей”:

Філія АТ “Укресімбанк”
рахунок отримувача 260030260560
МФО 325718
ЄДРПОУ 22360064

Виконавчий директор благодійного фонду “Ліцей”
Михайло Мурашук