

*Міністерство освіти і науки України*

*Львівський фізико-математичний ліцей  
при Львівському національному університеті  
імені Івана Франка*

# **„ЛЕВЕНЯ – 2008” ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ**

Інформаційний вісник



Львів  
Каменяр  
2008

**ББК 74.265.1-922**

**Л35**

**УДК 372.853**

*Цю книжку оргкомітет конкурсу підготував для переможців, сподіваючись, що зібрані в ній матеріали будуть корисними для учнів, які цікавляться різними видами інтелектуальних змагань (олімпіади, конкурси, турніри) з фізики, та для вчителів, які їх готуватимуть.*

Директор ліцею **Мар'ян Добосевич**

Оргкомітет конкурсу “Левеня – 2008”:

**Володимир Алексейчук**

**Дарія Біда**

**Раїса Кузик**

**Олена Хоменко**

Адреса оргкомітету:

79054, Львів, вул. Караджича, 29

Львівський фізико-математичний ліцей

Тел.: (032) 240-17-02, (0322) 62-00-68

Факс.: (032) 240-17-02

E-mail: [levenia@polynet.lviv.ua](mailto:levenia@polynet.lviv.ua)

<http://levenia.com.ua>

Директор благодійного фонду “Ліцей” **Михайло Мурашук**

Благодійний фонд “Ліцей”

Львівське відділення Укресімбанку

рахунок отримувача 260030260560

МФО 325718

ЄДРПОУ 22360064

Автор логотипу **Орест Бурак**

Л  $\frac{4306021200-34}{2008}$  Без оголошення

ISBN

©Львівський фізико-математичний ліцей, 2008

## *Дорогі учні, шановні вчителі!*

Від імені організаційного комітету і від себе особисто сердечно вітаю вас з перемогою у Всеукраїнському фізичному конкурсі “Левеня”, яким багато років сумлінно та відповідально опікується Львівський фізико-математичний ліцей при Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Всеукраїнський фізичний конкурс “Левеня” - це масове творче змагання школярів, у якому засвідчується високий рівень знань з фізики не тільки в межах навчальних програм, а й розвиток логічного мислення, знання деталей і особливостей фізичних процесів та явищ, виявляються здібності учнів до природничо-математичних наук, демонструється їхній творчий підхід до розв’язання фізичних проблем.

Сподіваюся, що й надалі не згасатиме ваш пошук до глибинного пізнання основ наук, відкриття таємниць її величі Природи завдяки знанням прекрасної, надзвичайно цікавої та перспективної науки - фізики!

Будьте вдячними рідній школі, своїм батькам та вчителям, які ведуть вас першими життєвими дорогами, прилучають до безмежності людських знань, дають перші найголовніші уроки мудрості та душевності, справедливості та гідності.

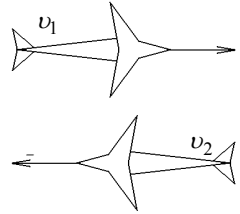
Міцного вам здоров’я, невичерпності творчих сил, успіхів та перемог в усіх започаткованих справах!

Нехай подолання перших сходинок у конкурсних шкільних інтелектуальних змаганнях відкриває шляхи до розвитку ваших талантів, умінь і творчих здібностей з метою досягнення вищих рубежів наукових звершень!

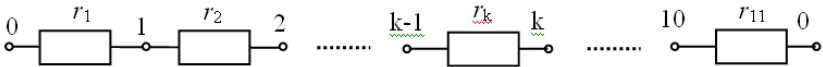
*Хоменко Олена Вікторівна,  
головний спеціаліст департаменту  
загальної середньої та дошкільної освіти  
Міністерства освіти і науки України*

Міністерство освіти і науки України  
 XLV Всеукраїнська олімпіада юних фізиків, м. Вінниця, 2008  
**Теоретичний тур 8-й клас**

1. Два літаки рухаються із надзвуковою швидкістю горизонтально прямолінійно зустрічними курсами, перебуваючи в одній вертикальній площині на різних висотах. В деякий момент часу літак 1 виявився точно над літаком 2. Через час  $t_1 = 1,8$  с після цього другий пілот почув звук від першого літака. В який момент часу  $t_2$  перший пілот почув звук від другого літака? Швидкість звуку в повітрі  $u = 324$  м/с, швидкості літаків незмінні і дорівнюють:  $v_1 = 405$  м/с,  $v_2 = 351$  м/с.

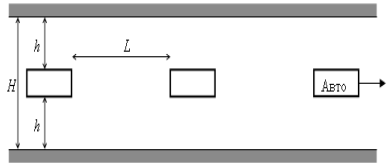


2. З одинадцяти послідовно з'єднаних резисторів опорами від 1 Ом до 11 Ом ( $r_k = k$  Ом) шляхом з'єднання двох крайніх клем 0 утворено замкнуте коло.



Клеми зберегли нумерацію від 0 до 10. До яких клем треба приєднати вхідний та вихідний провідники, щоб опір між ними був найбільшим? Чому цей опір дорівнює?

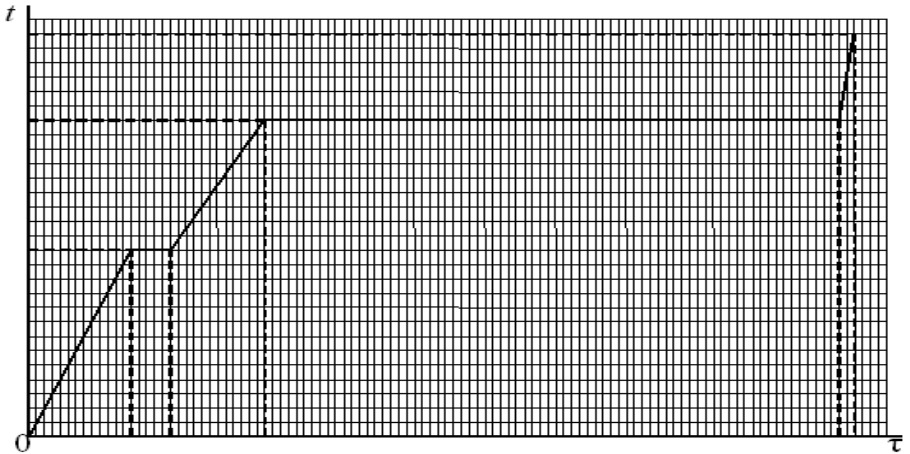
3. Під час змагань тонку прямю і достатньо легку трубу треба перенести у горизонтальному положенні через дорогу, якою їдуть бугафорні автомобілі. Дорога обмежена з двох боків паралельними стінками. Перемагає та команда, яка перенесе трубу найбільшої довжини, не потрапивши в "аварію". Запропонуйте такий спосіб перенесення труби командою, щоб довжина труби була найбільшою. Знайдіть цю довжину. Перекидати трубу через автомобілі заборонено. Швидкість руху автомобілів стала,  $u = 12$  м/с, максимальна швидкість, з якою з трубою можуть узгоджено бігти члени команди,  $v = 3$  м/с.  $H = 9$  м,  $h = 3,6$  м,  $L = 8$  м.



4. Воду можна охолодити без перетворення в лід нижче температури  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Процес кристалізації води може початися при певній температурі  $t < t_0$ . Лід, що утворюється при цьому, відрізняється за своїми фізичними властивостями від звичайного льоду, одержаного при температурі  $0^\circ\text{C}$ . Визначте, чому дорівнює питома теплота плавлення льоду  $\lambda_2$  при температурі  $t_1 = -10^\circ\text{C}$ . В інтервалі температур від  $(-10^\circ\text{C})$  до  $0^\circ\text{C}$  питома теплоємність води дорівнює  $c_1 = 4,17 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C), питома теплоємність льоду –  $c_2 = 2,17 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C). Питома теплота плавлення льоду при температурі  $0^\circ\text{C}$  дорівнює  $\lambda_1 = 3,32 \cdot 10^5$  Дж/кг.

5. Останнім часом все ширше застосовуються композитні матеріали. Одне із застосувань композитів – це тепловий захист космічних апаратів, які з великою швидкістю входять в атмосферу Землі і сильно розігріваються. Запропонований для

теплового захисту композит являє собою пористу кераміку, заповнену металом. Пори з'єднані між собою і мають виходи. Під час випробувань зразку композиту



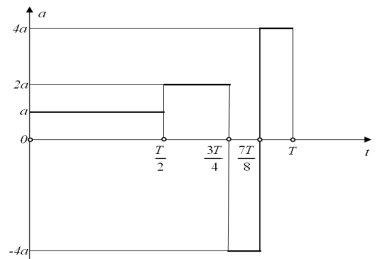
передавали постійну теплову потужність, починаючи з температури  $0^{\circ}\text{C}$ . Аналізуючи умовний графік залежності температури  $t$  від часу  $\tau$ , визначіть, яким саме металом була наповнена кераміка, а також знайдіть його питому теплоємність у рідкому стані, температуру кипіння і питому теплоту пароутворення металу.

	Питома теплоємність $c$ , кДж/(кг·К)	Температура плавлення, $^{\circ}\text{C}$	Питома теплота плавлення $\lambda$ , кДж/кг
Алюміній	0,9	660	380
Берилій	1,9	1300	1360
Літій	4,4	182	630
Магній	1,0	650	375

Задачі запропонували С.У.Гончаренко (1,4), А.П.Федоренко (2), О.Ю.Орлянський (3,5).

## 9 клас

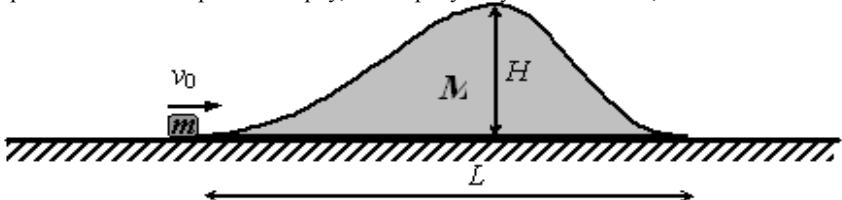
1. Гімнастка кидає обруч у вертикальній площині вздовж підлоги зі швидкістю  $V_0=4$  м/с, закрутивши його з кутовою швидкістю  $\omega=40$   $\text{c}^{-1}$  так, що він, торкнувшись підлоги, повернувся назад, не відриваючись від неї. Діаметр обруча  $D=1$  м. Не враховуючи можливих втрат тепла обручем, знайдіть найбільше можливе підвищення його



температури внаслідок тертя після повернення, якщо питома теплоємність матеріалу обруча  $C=880$  Дж/(кг·К).

2. Кожного разу, коли спортивний автомобіль проходить уздовж замкненої горизонтальної траси зі сталою за величиною швидкістю  $v$ , акселерометр фіксує прискорення, графік яких  $a(t)$  зображений на мал. Вважаючи, що час проходження траси  $T$  та прискорення  $a$  задані, визначити швидкість руху автомобіля  $v$  та довжину траси  $S$ . Зобразити траєкторію руху, вказавши її параметри.

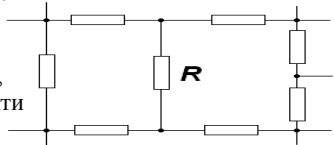
3. Гірка масою  $M$ , висотою  $H$  і довжиною  $L$  може переміщатися вздовж гладенької горизонтальної поверхні. На гірку, яка перебуває у стані спокою,



наїжджає з початковою швидкістю  $v_0$  тіло масою  $m$  (див. мал.) і через деякий час  $t$  з'їжджає з гірки на горизонтальну поверхню. Визначити шлях, який пройде гірка за цей час. Силами тертя, опором повітря знехтувати.

4. Див. 8 клас, задача 4.

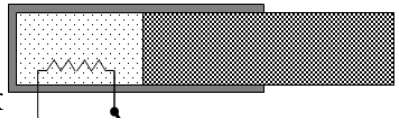
5. Коло (мал.3) складається з резисторів, опір яких невідомий. Як, маючи амперметр, вольтметр, джерело струму і з'єднувальні провідники, виміряти опір  $R$ , не розриваючи жодного контакту в колі?



Задачі запропонували В.П.Сохацький (1), А.П.Федоренко (2), О.Ю.Орлянський (3), С.У.Гончаренко (4-5).

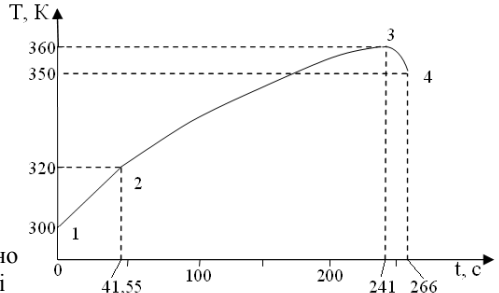
## 10 клас

1. Один моль двоатомного ідеального газу (5 ступенів вільності) знаходиться в циліндричній посудині під легким поршнем (мал.1).

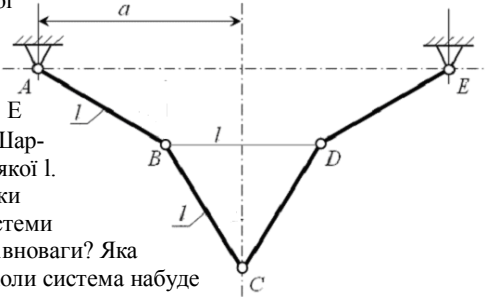


В початковому стані газ мав температуру  $300\text{К}$  і займав половину об'єму посудини.

На мал.2 подана залежність температури газу від часу після увімкнення нагрівача потужністю  $10$  Вт (ділянка 1-2 лінійна). Знайти рівняння газових процесів на ділянках 1-2 та 2-3-4. Як зміниться теплоємність газу при збільшенні його об'єму? Система теплоізолювана, теплоємності поршня і стінок посудини значно менші за величиною від теплоємності газу. Зовнішній тиск  $p_d$  дорівнює атмосферному.



2. Чотири однорідні стержні однакової маси  $m$  та однакової довжини  $l$ , що з'єднані між собою та зі стійкою шарнірно, підвішені так, як показано на мал.3. Відстань між шарнірами  $A$  і  $E$  дорівнює  $2a$ . При цьому  $2a=l(1+\sqrt{3})$ . Шарніри  $B$  і  $D$  з'єднані ниткою, довжина якої  $l$ .



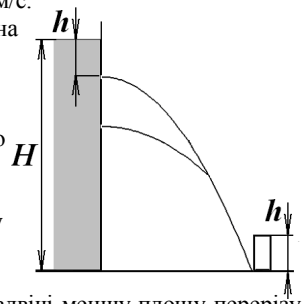
Нитку миттєво перерізають. На скільки зміститься шарнір  $C$  при переході системи із початкового в положення стійкої рівноваги? Яка кількість теплоти виділиться за час, коли система набуде стійкої рівноваги?

3. Супутникові навігаційні системи дозволяють визначати місцезнаходження і швидкість руху у будь-якій точці земної кулі. Супутник передає сигнал, який містить інформацію про точний час його відправлення і координати супутника на цей момент. Приймач реєструє час надходження сигналів від декількох супутників і за затримкою кожного сигналу обчислює відстані до супутників, а разом з цим і своє точне положення. Для цього необхідно приймати сигнали щонайменше від чотирьох супутників, щоб врахувати неточність ходу годинника приймача. Будемо вважати, що супутники рухаються по коловим орбітам з радіусами  $r = 20\,000$  км точно. Визначити значення широти, довготи і висоти над рівнем моря людини на повітряній кулі, мобільний телефон якої отримав такі дані від чотирьох супутників:

№ супутника	Час отримання сигналу (годинник приймача)	Час відправлення сигналу за інформацією супутника (точний час)	Широта супутника в момент відправлення сигналу	Довгота супутника в момент відправлення сигналу
1	10 год 12 хв 13,1600 с	10 год 12 хв 13,1121 с	45°00'00" південна	0°00'00"
2	10 год 12 хв 13,1601 с	10 год 12 хв 13,1122 с	45°00'00" північна	0°00'00"
3	10 год 12 хв 13,1602 с	10 год 12 хв 13,1123 с	45°00'00" північна	90°00'00" східна
4	10 год 12 хв 13,1463 с	10 год 12 хв 13,1120 с	0°00'00"	45°00'00" східна

Земля має припущену форму: екваторіальний радіус  $R_e=6378,15$  км, полярний  $R_p=6356,80$  км. Швидкість світла у вакуумі  $299792458$  м/с.

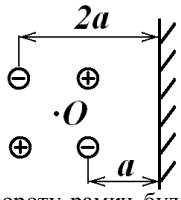
4. На підлозі стоїть велика циліндрична діжка, заповнена рідиною до рівня  $H=1$  м. Через невеликий отвір, який зроблений у діжці на глибині  $h=10$  см, в горизонтальному напрямку б'є струмінь рідини і розбивається об підлогу поруч із циліндричним стаканом (мал. 4). Якщо в діжці під першим отвором зробити подібний йому другий отвір, струмені води перетнуться в просторі і зіллються в один. Визначити, наскільки точка перетину струменів виявиться нижчою за другий отвір. Уявіть тепер, що другий отвір зроблений на вчетверо більшій глибині, ніж перший, він подібний до нього, але має вдвічі меншу площу перерізу  $S_2=S_1/2$ . Чи потрапить об'єднаний струмінь до стакану? За якого співвідношення



$S_2/S_1$  струмінь перелетить стакан? Висота стакана  $h=10\text{см}$ , відстань від нього до діжки в шість разів більша за його діаметр.

5. а) Деякий точковий заряд упродовж тривалого часу утримується на фіксованій відстані від нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю. Потім заряд швидко віддаляють від площини на відстань удвічі більшу початкової і утримують його в новому положенні. Яка кількість теплоти виділиться після цього в провідній площині, якщо відомо, що під час віддалення точкового заряду було виконано роботу  $36\text{ мкДж}$ ?

б) Квадратну рамку, у кутах якої розташовані точкові заряди,  $+q, (-q), +q, (-q)$ , спочатку упродовж тривалого часу тримають у фіксованому положенні біля нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю (мал.5), а потім швидко повертають на  $90^\circ$  навколо осі, що проходить через центр квадрату перпендикулярно до площини малюнка. Яка кількість теплоти виділиться після цього у провідній площині, якщо відомо, що під час повороту рамки було виконано роботу  $36\text{ мкДж}$ ?



Задачі запропонували Б.В.Беляєв та С.В.Кара-Мурза (1), А.П.Федоренко (2), О.Ю.Орлянський (3-4), Є.П.Соколов(5).

### 11 клас

1. Див. 10 клас, задача 1.

2. Контур, складений із сполучених послідовно котушки індуктивністю  $L$  та конденсатора ємністю  $C$ , підключених до джерела ЕРС. В моменті часу, коли напруга на конденсаторі досягає максимального значення, полярність джерела змінюється на протилежну. Якою буде максимальна напруга на конденсаторі після  $n$  таких перемикань? Якою буде максимальна напруга на конденсаторі за наявності енергетичних втрат у контурі? Опір втрат  $r$  вважати значно меншим від характеристичного опору  $\rho=(L/C)^{1/2}$ . Через яке число перемикань буде досягнута максимальна амплітуда напруги на конденсаторі?

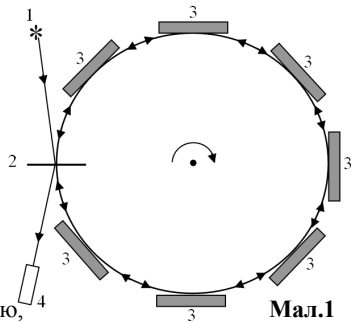
3. Хвиля довільної природи поширюється від джерела 1 (мал.3). Кільцевий інтерферометр являє собою диск радіуса  $R$ , який обертається з кутовою швидкістю  $\Omega$  навколо осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до площини диска.

*Кільцевий інтерферометр:*

- 1- джерело випромінювання,
- 2- світлоподільна пластинка (напівпрозоре дзеркало), 3 – дзеркала, 4 – фотоприймач.

Стрілки показують напрямок обертання інтерферометра.

Кількість розташованих вздовж кола дзеркал 3 прямує до нескінченності. На диску також розміщено напівпрозору пластинку 2 та приймач хвиль 4. Напівпрозора пластинка розділяє хвилю,



Мал.1



яку випромінює джерело, на дві – одна хвиля поширюється по колу радіуса  $R$  в напрямку обертання диска, а друга - в протилежному. Швидкість хвилі відносно нерухомого диска  $V_\phi$ , а частота –  $\omega$ . Нехтуючи зміною геометричних розмірів інтерферометра та поперечним зсувом зустрічних хвиль внаслідок проявів неінерціальних властивостей системи відліку, знайти різницю  $\Delta t$  часу проходження кільця кожною з зустрічних хвиль. Порівняйте цю різницю в випадку електромагнітних та акустичних хвиль. Чи залежить ця різниця від того, якою речовиною заповнений інтерферометр? Врахувавши, що приймач та джерело хвиль розташовані на відстані  $R$  від центра обертання, знайдіть різницю фаз зустрічних хвиль, які утворюють інтерференційну картину на приймачі.

4. Відомо, що під час зйомки зі спалахом або потужним підсвітлюванням від маленьких пилинок або краплин, наявних у повітрі, на знімку помітні круги (мал.4). Поясніть фізику цього явища. Пропустивши, що за це явище відповідають саме краплинки, визначте відстань від об'єктиву камери до двох із них: тієї, що дає найбільше зображення (у центрі), і дещо меншої на фоні плеча людини. Радіус об'єктиву  $R$  можна оцінити в 1 см, відстань від об'єктиву до людини  $d$  в 3 м. Інші дані визначте, використовуючи фотографію. Уявіть собі, що у Вас є фотознімок, на однорідному фоні якого видно багато кругів різних розмірів та яскравості. Ви знайшли два однаково світлі круги, які мають різні радіуси  $r_1'$  і  $r_2'$ . Вважаючи, що пилинки однакові, запропонуйте додаткове співвідношення для визначення характеристик фотоапарату. Об'єktiv фотоапарату вважати тонкою лінзою.

5. Дана система блоків (мал.5). Через блоки перекинута тонка невагома нерозтяжна нитка. Всі  $2n-1$  ( $n$  – натуральне число) блоків мають однакові маси  $M$  і радіуси  $r$ . Блоки можуть обертатися навколо своїх осей без тертя. Нитка не ковзає по блоках. Коефіцієнт пружності пружини  $k$ . Визначити період малих вертикальних коливань тягарця масою  $m$  після виведення його з положення рівноваги. Момент інерції кожного блоку вважати рівним  $Mr^2/2$ .



Задачі запропонували Б.В.Беляєв та С.В.Кара-Мурза (1-2), С.Й.Вільчинський (3), О.Ю.Орлянський (4), С.У.Гончаренко (5).

## Експериментальний тур

### 8 клас

**Завдання 1** Виготовте з дроту електричний нагрівник. Дослідіть залежність сили струму в нагрівнику від його опору. Визначте максимальну потужність нагрівника, який можна виготовити з цього дроту для наданого Вам гальванічного елемента. Визначте при якому опорі нагрівника це досягається.

*Обладнання:* *Індивідуальне* – амперметр лабораторний; гальванічний елемент; лінійка; дріт без ізоляції, опір одного метра якого 6,25 Ом; два з'єднувальні провідники; аркуш міліметрового паперу.

*У звіті:* 1) опишіть Вашу установку і принцип її дії; 2) опишіть хід Вашого експерименту; 3) побудуйте графіки залежності сили струму та потужності від опору нагрівника; 4) опишіть, що Ви зробили для підвищення точності вимірювань.

**Завдання 2** Використовуючи надане обладнання, дослідіть, як залежить ККД нагрівника від температури води в посудині. (Вказівка: об'єм води в посудині має бути 150 см<sup>3</sup>)

*Обладнання:* *Групове* – терези з набором важків; посудина з водою; годинник. *Індивідуальне* – циліндрична посудина від калориметра; парафінова свічка; лінійка; термометр; штатив з муфтою і кільцем.

*У звіті:* 1) опишіть Вашу установку і принцип її дії; 2) план проведення експерименту та обґрунтування методики проведених вимірювань; 3) побудуйте графік залежності ККД нагрівника від температури води; 4) спробуйте вивести формулу одержаної залежності та порівняйте теоретичні й експериментальні результати; 5) поясніть одержаний результат.

*Довідкові дані:* Питома теплота згоряння парафіну 46 МДж/кг, питома теплоємність води – 4200 Дж/кг °С.

### 9 клас

**Завдання 1** *Див. 8 клас, завдання 1.*

**Завдання 2** Використовуючи надане обладнання, дослідіть, як залежить ККД нагрівника від температури води в посудині. (Вказівка: об'єм води в посудині має бути 150 см<sup>3</sup>)

*Обладнання:* *Групове* – терези з набором важків; посудина з водою; годинник. *Індивідуальне* – циліндрична посудина від калориметра; парафінова свічка; лінійка; термометр; штатив з муфтою і кільцем.

*У звіті:* 1) опишіть Вашу установку і принцип її дії; 2) план проведення експерименту та обґрунтування методики проведених вимірювань; 3) побудуйте графік залежності ККД нагрівника від температури води; 4) спробуйте вивести формулу одержаної залежності та порівняйте теоретичні й експериментальні результати; 5) поясніть одержаний результат.

*Довідкові дані:* Питома теплота згоряння парафіну 46 МДж/кг, питома теплоємність води – 4200 Дж/кг °С.

## 10 клас

### Завдання 1

*Обладнання:* дві лінійки на 30 см, в одній з яких просвердлені два отвори недалеко від країв; відрізок риболовної гумової нитки діаметром 1,5 мм и довжиною 40 см; важок масою 100 г з гачком для підвішування; канцелярська скріпка; шкільний лабораторний штатив з муфтою й лапкою; лист міліметрового паперу.

*Завдання:* 1. Закріпіть лінійку з отворами в штативі горизонтально так, щоб її площина була вертикальною. Прив'яжіть скріпку до кінця гумової нитки так, щоб вузол не ковзав навіть при сильному розтягу гумової нитки. Пропустіть гумову нитку через обидва отвори лінійки. 2. Користуючись описаною вище вимірювальною установкою, вивчіть залежність довжини гумової нитки від сили її натягу в перерахунку на гумову нитку з початковою довжиною 50 см. Максимальна сила має відповідати п'ятиразовому збільшенню довжини нитки. Побудуйте графік отриманої залежності. 3. За отриманими даними розрахуйте залежність коефіцієнта жорсткості гумової нитки довжиною 50 см від сили її натягу та побудуйте графік цієї залежності. 4. У звіті обговоріть відповідність отриманих результатів до закону Гука, дайте якісне пояснення особливостей деформації гуми, які Ви спостерігали. 5. У звіті наведіть теоретичне обґрунтування обраної експериментальної методики, схему виміральної установки, опис принципу її дії і послідовності вимірювань, заходи для досягнення максимальної точності вимірювань. На графіках відобразіть оцінені Вами похибки експериментальних результатів.

### Завдання 2

*Обладнання:* Групове – метроном, встановлений на 120 ударів за хвилину; терези с важками; вода. *Індивідуальне* – циліндрична пластикова пляшка місткістю 0,5 л, з кришкою; плоска дошка (парта) з набором підставок для зміни кута її нахилу; лінійка, шматочок крейди; міліметровий папір; шприц на 20 мл.

*Завдання:* 1) Встановіть парту під кутом  $5^\circ$  до горизонту. 2) Вважаючи пляшку тонкостінним циліндром, а її рух по парті рівноприскореним, виведіть формулу для прискорення пляшки з деякою кількістю налитої в неї води. 3) Визначте експериментальну залежність прискорення пляшки, яка скочується по парті, від маси налитої в неї води. Масу змінюйте в межах 0 – 500 г, обираючи крок, що дозволяє встановити характер досліджуваної залежності. 4) Результати Ваших вимірювань і розрахунків подайте у вигляді таблиці. 5) Побудуйте графік залежності прискорення пляшки від маси налитої в неї води, зобразивши розраховану залежність у вигляді лінії, а експериментальну – точками.

*У звіті обґрунтуйте:* - причину залежності прискорення від маси води;  
- відповідність між експериментальними даними та теоретичними розрахунками;  
- оцініть похибку вимірювань та обґрунтуйте заходи для її мінімізації.

## 11 клас

### Завдання 1

*Обладнання:* Групове – цукровий пісок; терези з важками; вимірювальний циліндр на 500 мл; вода. *Індивідуальне* – пластикова пляшка з відрізаним дном і віконцем у кришці; одноразовий пластиковий стакан місткістю 500 мл; лазерна указка; штатив з трьома лапками і муфтами; предметне скло для мікроскопа; відрізок мідного дроту; лінійка довжиною 30 см; аркуш білого паперу А4; аркуш міліметрового паперу; чайна або десертна ложка.

*Завдання:* 1. Приготуйте 500 г 40% (за масою) розчину цукру. 2. Виготовте установку для вимірювання обертання площини поляризації світла розчином цукру, використовуючи лазерну указку як джерело лінійно поляризованого світла і предметне скло як аналізатор. 3. Виміряйте залежність кута повороту площини поляризації світла від концентрації розчину цукру в діапазоні концентрацій 40% – 10% з кроком 10% при незмінній відстані, пройденій променем, зменшуючи концентрацію розчину додаванням води. Результати подайте у формі таблиці та графіка. 4. Розрахуйте питому сталу обертання площини поляризації світла для виготовленого розчину цукру. 5. У звіті обґрунтуйте методику експериментального дослідження, опишіть схему вимірювальної установки, принципи її дії, процедуру зміни концентрації розчину. Оцініть похибку отриманого результату та обґрунтуйте заходи для її мінімізації.

*Заходи безпеки.*

**УВАГА!** Під час виконання роботи промінь лазерної указки не повинен потрапити прямо в око.

### *Коротка теоретична довідка*

Світлова хвиля, в якій напрямки вектора напруженості електричного поля та вектора магнітної індукції строго фіксовані, називається лінійно поляризованою. Джерелом лінійно поляризованого світла є лазер. Неполаризоване світло при відбитті від межі поділу двох діелектриків стає лінійно поляризованим, якщо кут падіння  $\theta$  задовольняє умові  $\operatorname{tg} \theta = n$  (кут Брюстера), де  $n$  – відносний показник заломлення середовища, від якого відбивається світло.

Деякі речовини, які називають оптично активними, спричиняють поворот площини поляризації світла. До них належить і водний розчин цукру. Кут повороту площини поляризації  $\varphi$  пропорційний до концентрації розчину  $c$  і відстані  $d$ , яку в ньому пройшло світло:  $\varphi = \alpha c d$  – закон Біо.

Величина  $\alpha$  називається питомою сталою обертання.

### Завдання 2

*Обладнання:* Групове – метроном, встановлений на 120 ударів за хвилину; терези з важками; вимірювальний циліндр на 500 мл; вода. *Індивідуальне* – циліндрична пластикова пляшка місткістю 0,5 л, з кришкою; плоска дошка (парта) з набором підставок для зміни кута її нахилу; лінійка, шматочок крейди; міліметровий папір.

*Завдання:* 1. Встановіть парту під кутом  $5^\circ$  до горизонту. 2. Вважаючи пляшку тонкостінним циліндром, а її рух по парті рівноприскореним, виведіть формулу для

прискорення пляшки з деякою кількістю наливої в неї води. 3. Визначте експериментальну залежність прискорення пляшки, яка скочується по парті, від маси наливої в неї води. Масу змінюйте в межах 0 – 500 г, обираючи крок, що дозволяє встановити характер досліджуваної залежності. 4. Результати Ваших вимірювань і розрахунків подайте у вигляді таблиці. 5. Побудуйте графік залежності прискорення пляшки від маси наливої в неї води, зобразивши розраховану залежність у вигляді лінії, а експериментальну – точками. 6. У звіті обґрунтуйте: *a)* причину залежності прискорення від маси води; *b)* відповідність між експериментальними даними та теоретичними розрахунками; *c)* оцініть похибку вимірювань та обґрунтуйте заходи для її мінімізації.

## РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

### 8 клас

#### Задача 8.1

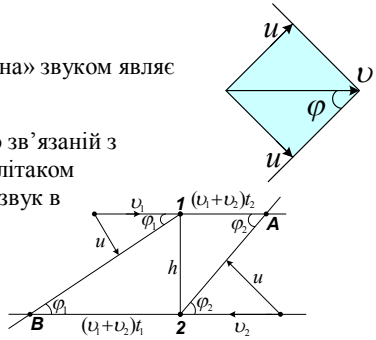
При русі надзвукового літака область «заповнена» звуком являє

собою конус (див. мал.)  $tg\varphi = u/\sqrt{v^2 - u^2}$ .

Намалюємо задачу в системі відліку одночасно зв'язаній з першим літаком (частина малюнка) і з другим літаком (друга частина малюнка). Перший пілот почує звук в точці А, а другий в точці В.

$$tg\varphi_1 = u/\sqrt{v_1^2 - u^2} = h/((v_1 + v_2)t_1)$$

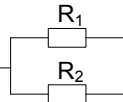
$$tg\varphi_2 = u/\sqrt{v_2^2 - u^2} = h/((v_1 + v_2)t_2)$$



Розв'язавши систему рівнянь отримаємо:  $t_2 = t_1 \sqrt{(v_2^2 - u^2)/(v_1^2 - u^2)} = 1$  с.

#### Задача 8.2

Повний опір ланцюга  $R_0 = \sum R_k = 66$  Ом.



Опір між двома клемми (див. мал.)

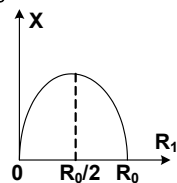
$R_x = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = R_1 (R_0 - R_1) / R_0$ . Опір  $R_x$  максимальний, коли чисельник дробу буде максимальним.

$$x = R_1 (R_0 - R_1) = R_0 R_1 - (R_1)^2.$$

Графік цієї функції парабола вітками вниз (див. графік).

$x$  досягає максимуму при  $R_1 = R_2 = R_0/2 = 33$  Ом. Якщо

підєднатись до клем 2 і 8 отримаємо потрібний результат  $R_x = R_1/2 = 16,5$  Ом.



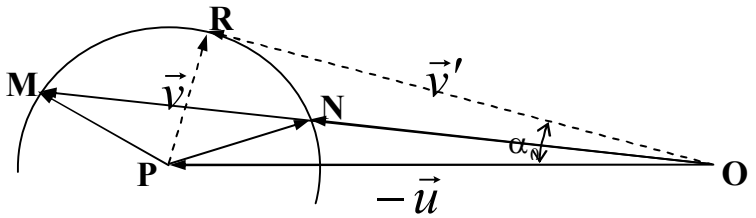
#### Задача 8.3

Якщо перейти в систему відліку, пов'язану з автомобілями, то вони будуть нерухомі, узбіччя дороги рухатиметься повз них у протилежному напрямку зі швидкістю  $u = 12$  м/с, а гравці з трубою пересуватимуться з відносною швидкістю  $v'$ , яку можна знайти із закону додавання швидкостей  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ . Як видно з рисунку, найбільша довжина труби  $S$ , що може «пролізти» між автомобілями, дорівнює відрізку АС, який неважко знайти із подібності трикутників АСD і АВЕ:

$$\frac{S}{\sqrt{L^2 + (H - 2h)^2}} = \frac{H - h}{H - 2h}, \quad S = \frac{H - h}{H - 2h} \sqrt{L^2 + (H - 2h)^2} = 24,6 \text{ м.}$$

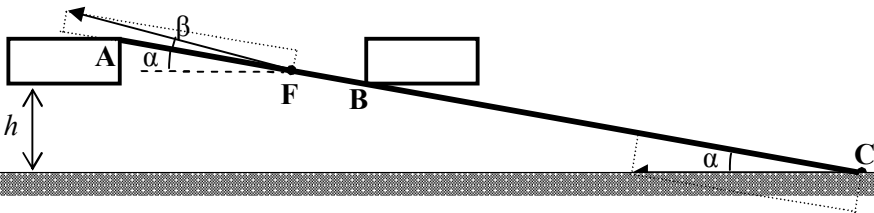
кут  $\alpha$ , який утворює АС з напрямком дороги знаходимо із співвідношення

$$tg\alpha = (H - 2h)/L = 9/40, \quad \alpha \approx 12,68^\circ.$$



Залишається відповідати на питання, як повинні при цьому рухатись гравці і чи вистачить у них швидкості? Зазначимо, що для досягнення положення, зображеного на рисунку, труба повинна була перед цим повертатися. Відносна швидкість точки С труби безпосередньо перед зображеним на рисунку положенням була спрямована ліворуч вздовж обмеження дороги, відносна швидкість точки А мала дещо менше значення, оскільки проекції швидкостей цих точок на напрямку труби однакові, а перпендикулярні відносяться як  $AB/BC$  ( $AB < BC$ ). Але, коли мова йде про відносну швидкість, її величина пов'язана з напрямком руху, більш того, не всі напрямки руху можливі.

Відносна швидкість  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = -\vec{u} + \vec{v}$  для довільних напрямків  $\vec{v}$  має зручне графічне відображення (див. Рис.2). Найбільший кут  $\alpha_0 = \angle POR$ , за якого можливий рух (з відносною швидкістю  $v' = \sqrt{u^2 - v^2} = 3\sqrt{15} \text{ м/с} \approx 11,6 \text{ м/с}$ ), знаходимо з прямокутного трикутника  $OPR$ , де  $\sin \alpha_0 = v/u = 0,25$ :  $\alpha_0 \approx 14,48^\circ$  ( $\alpha_0 > \alpha$ , перебігти дорогу можливо). Для менших кутів відносна швидкість може знаходитись в інтервалі, який на рисунку відповідає відстаням між  $ON$  і  $OM$  (найбільший інтервал відносних швидкостей від  $u - v = 9 \text{ м/с}$  до  $u + v = 15 \text{ м/с}$  відповідає руху вздовж напрямку дороги). Таким чином, траєкторія відносного руху гравця не може відхилитися від напрямку «ліворуч» більше ніж на кут  $\alpha_0$ , при цьому швидкість його руху залежить від напрямку руху. Визначимо, чи є на трубці точка (позначимо  $F$ ), яка у найбільш критичний момент рухається під кутом  $\alpha_0$  (див. Рис.3). Припустимо, що це так. Тоді кут, який утворює швидкість точки  $F$  з напрямком труби,  $\beta = \alpha_0 - \alpha \approx 1,8^\circ$ . Оскільки проекції швидкостей точок  $F$  і  $C$  на напрямку труби однакові  $v_F \cos \beta = v_C \cos \alpha$ , а проекції на перпендикулярний



напрямок відносяться як відстані  $FB/BC$ , маємо  $\frac{FB}{BC} = \frac{v_F \sin \beta}{v_C \sin \alpha}$ , звідки знаходимо,

що  $FB = BC \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha \approx 0,14 BC \approx 2,3$  м, що значно менше відстані  $AB$ . Отже перенести трубу такої довжини, тримаючи її за кінці, не можна. Але ж за умовою це не вимагається. Гравців треба розмістити поближче до центру труби, але під час змагань вони повинні бігти так, щоб труба поверталася (труба за умовою легка).

Одна з можливих стратегій виглядає так. Два гравці беруть трубу поблизу від центру, розвертають її під кутом  $\alpha$  і біжать так, щоб труба ковзала по задньому куту автомобіля (точка  $B$ ), а віддалений кінець труби (точка  $C$ ) ковзав вздовж обмеження дороги. Коли труба досягає критичного положення, можна рухатись з відносною швидкістю спрямованою вздовж труби (виникає питання, як гравці протиснуться між трубою і автомобілем), а можна ще трохи розвернувшись (кут  $\alpha_0$  це дозволяє) і змінивши напрямок руху чисто пробігти між автомобілями і досягти симетричного критичного положення з іншого боку дороги. І далі все повторити. Звісно це виглядає досить складним, але, як відомо, тренування, особливо якщо вони підкріплені мріями про вагомий призовий фонд, допомагають досягти успіху.

Наприклад, у системі відліку «дорога» гравці, взявшись за середину труби, починають бігти вздовж дуги кола радіусом  $S/2$  з центром у нерухомій точці  $S$  на узбіччі, ковзаючи трубою у точці  $B$  автомобіля (див. Рис.4). У критичний момент, їх швидкість  $v_1$  знайдемо з умови проковзування в точці  $B$ :  $u \sin \alpha = v_1 \frac{BC}{S/2}$ .

$v_1 = \frac{3}{4} u \sin \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{41} \cdot 12 \text{ м/с} \approx 2 \text{ м/с}$  - як бачимо ніяких проблем бігти з такою швидкістю у гравців не буде. Далі, якщо вони продовжуватимуть поступально бігти у тому ж напрямку (перпендикулярно до труби) з середньою швидкістю

$v_2 = u \sin \alpha = \frac{108}{41} \text{ м/с} \approx 2,634 \text{ м/с}$ , труба весь час буде проковзувати між двома автомобілями (відносна швидкість спрямована вздовж труби) аж до критичного положення з іншого боку дороги, коли точка  $A$  труби доткнеться до узбіччя. Після чого гравці роблять ще одну пробіжку вздовж кола з центром у точці  $A$ .

#### Задача 8.4

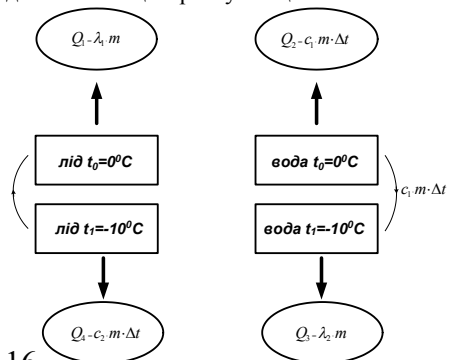
Запишемо рівняння теплового балансу:

$$\lambda_1 \cdot m + c_2 \cdot m \cdot \Delta t = \lambda_2 \cdot m + c_1 \cdot m \cdot \Delta t$$

Звідси випливає, що

$$\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2) \cdot \Delta t$$

$$\lambda_2 = 3,12 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$





### Задача 8.5

Позначимо через  $x$  величину масштабного відрізка часу  $\tau$ , а через  $y$  величину масштабного відрізка температури  $t$ . Тоді на першому етапі кераміка з металом отримали кількість теплоти  $Q_1 = 13xP$  і нагрілися до температури плавлення металу  $t_n = 13y$  ( $y$  °C). На другому етапі на розплавлення металу пішло  $Q_2 = 5xP$  теплоти. На третьому розплавлений метал разом з керамікою нагрівся до своєї температури кипіння  $t_k = 22y$ , отримавши  $Q_3 = 12xP$  теплоти. На четвертому етапі метал випаровувався, забезпечивши велике поглинання теплоти у кількості  $Q_4 = 73xP$ . На завершальному п'ятому етапі кераміка нагрівається вже без металу (вважаємо, що її теплоємність з підвищенням температури суттєво не змінилася). Запишемо рівняння для кожного етапу, позначивши масу і теплоємність кераміки через  $m_k$  і  $c_k$ , а масу металу і його теплоємність у рідкому стані через  $m$  і  $c'$ .

$$\begin{cases} 13y(cm + c_k m_k) = 13xP, \\ m\lambda = 5xP, \\ 9y(c'm + c_k m_k) = 12xP, \\ mr = 73xP, \\ 6yc_k m_k = 2xP. \end{cases}$$

Виразимо з останнього рівняння  $xP$  і підставимо в інші:

$$\begin{cases} cm = 2c_k m_k, \\ m\lambda = 15yc_k m_k, \\ c'm = 3c_k m_k, \\ mr = 219yc_k m_k. \end{cases}$$

Тепер з першого рівняння підставимо в інші  $C_k m_k$ :

$$\begin{cases} 2\lambda = 15yc, \\ c' = 1,5c, \\ r = 109,5yc. \end{cases}$$

Оскільки  $y = t_n/13$  перше рівняння дозволяє перевірити, яким металом було наповнено кераміку. Згідно графіку і підрахунком  $\frac{t_n c}{\lambda} = \frac{26}{15} \approx 1,73$ . Згідно

довідковим даним

$$\left. \frac{t_n c}{\lambda} \right|_{Al} \approx 1,56, \quad \left. \frac{t_n c}{\lambda} \right|_{Be} \approx 1,82, \quad \left. \frac{t_n c}{\lambda} \right|_{Li} \approx 1,27,$$
$$\left. \frac{t_n c}{\lambda} \right|_{Mg} = \frac{650}{375} = \frac{130}{75} = \frac{26}{15}.$$

Як бачимо, саме дані по магнію співпадають абсолютно точно. Отже, метал в кераміці – магній, його питома теплоємність у рідкому стані  $c' = 1,5 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , температура кипіння  $t_k = 22y = \frac{22}{13}t_n = 1100 \text{ }^\circ\text{C}$ , питома теплота випаровування  $r = 5475 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

## 9 клас

### Задача 9.1

Записавши закони динаміки визначимо прискорення обруча.

$$\mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g \quad \beta l = \mu mg R = \beta m R^2 \Rightarrow \beta = \mu g / R$$

Виділення тепла припиниться, коли припиниться проковзування. Умова руху без проковзування  $v = \omega R$  (1), де:  $v = -v_0 + \mu gt$  (2);  $\omega = \omega_0 - \mu gt / R$  (3). Розв'язавши рівняння (1), (2) і (3) визначимо кінцеві швидкості обруча.  $v_k = (\omega_0 R - v_0) / 2$  (4),  $\omega_k = (\omega_0 R - v_0) / 2R$  (5).  $v_k = 8 \text{ м}/\text{с} > v_0$ , це означає, що проковзування обруча припиниться після того, як він прокотиться повз гімнастку. Теплота, що виділиться в обручі, дорівнює різниці кінетичних енергій обруча

$$cm\Delta t = I\omega_0^2 / 2 + mv_0^2 / 2 - I\omega_k^2 / 2 - mv_k^2 / 2 \Rightarrow \Delta t = (\omega_0^2 R^2 + v_0^2 + 2\omega_0 R v_0) / (4c) = 0,16 \text{ К.}$$

### Задача 9.2

Так як швидкість руху стала, а прискорення не дорівнює нулю, робимо висновок, що мова йде про нормальну складову прискорення. Поки нормальне прискорення стале, відповідна ділянка траси є частиною кола радіуса  $R_i = \frac{v^2}{a_i}$ .

графіка легко встановити, що  $R_1 = 2R_2 = 4R_3 = 4R_4$ .

Довжина кожної ділянки  $S_i = \alpha_i R_i = vt_i$ , тому відповідно її центральний кут дорівнює:

$$\alpha_1 = \frac{vT}{2R_1}; \quad \alpha_2 = \frac{v(\frac{3T}{4} - \frac{T}{2})}{R_2} = \frac{vT}{2R_1}; \quad \alpha_3 = \frac{v(\frac{7T}{8} - \frac{3T}{4})}{R_3} = \frac{vT}{2R_1}; \quad \alpha_4 = \frac{vT}{2R_1}.$$

Отже, за модулем  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ .

Зміна напрямку нормального прискорення (зміна знаку) означає, що на третій ділянці має місце правий поворот.

Враховуючи, що за повне коло автомобіль робить повний оберт на кут  $2\pi$  і при цьому на третій ділянці повертається в протилежному напрямку, одержимо:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Тому  $\alpha_i = \pi$ .

Так як  $v = \frac{\pi R_1}{t_1}$  та  $a_1 = \frac{v^2}{R_1}$ , то

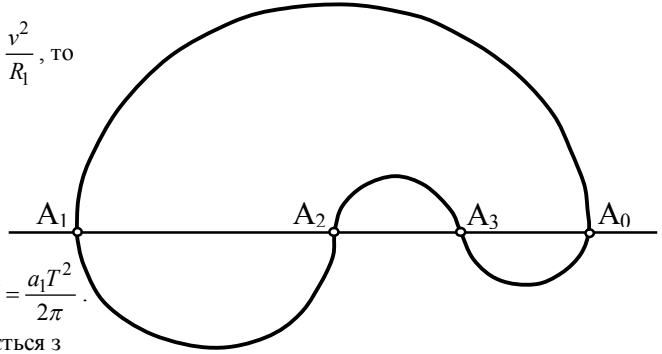
$$R_1 = a_1 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2.$$

Отже, швидкість руху

$$v = \frac{a_1 T}{2\pi}.$$

Довжина траси  $S = vT = \frac{a_1 T^2}{2\pi}$ .

Профіль траси складається з чотирьох півкіл, що зображені на малюнку  
 $A_0A_1 = 2R_1$ ;  $A_1A_2 = R_1$ ;  $A_2A_3 = A_3A_0 = 0.5 R_1$ .



### Задача 9.3

Тіло може з'їхати з гірки назад, а може переїхати гірку і з'їхати з іншої сторони (спереду). Визначимо, за якої умови це відбувається.

Якщо швидкість поступово збільшувати, тіло буде підніматися на все більшу висоту. Особливий випадок, коли тіло піднімається на верхівку гірки з нульовою відносно неї швидкістю. Розглянемо цей граничний випадок відносно нерухомої системи відліку з точки зору законів збереження

$$\begin{cases} mv_0 = (m + M)v, \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)v^2}{2} + mgH. \end{cases}$$

Знаходимо, якщо  $v_0 < \sqrt{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)gh}$  тіло не зможе піднятися на верхівку і з'їде

назад через початкову точку, якщо ж  $v_0 > \sqrt{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)gh}$  - тіло буде мати,

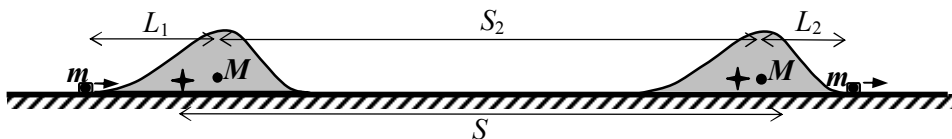
проходячи верхівку, більшу від гірки швидкість і з'їде попереду неї. Звісно, швидкість навантаженої тілом гірки буде змінюватись в залежності від горизонтальної проекції сили, з якою тіло під час відносного руху тисне на гірку. Але, якщо розглянути систему з двох тіл, ця сила виявиться внутрішньою, а ззовні у горизонтальному напрямку ніякі сили на цю систему не діють. Це означає, що

центр мас весь час буде рухатись зі сталою швидкістю  $v_c = \frac{mv_0}{m + M}$  і за час  $t$

зміститься на відстань  $S = v_c t = \frac{mv_0 t}{m + M}$ . Тоді у першому випадку, коли тіло

з'їжджає з тієї ж сторони, і центр мас системи відносно гірки набуває попереднього положення, гірка пройде таку ж відстань, як і центр мас:  $S_1 = S = \frac{mv_0 t}{m+M}$ .

У другому випадку розглянемо задачу детальніше (див. Рис.). Як бачимо, відстань



$S_2$ , яку пройшла гірка разом зі своїм центром мас (точка  $M$ ), менша, ніж відстань  $S$ , яку пройшов центр мас системи тіл гірка + тіло (на рисунку позначено зірочкою  $\star$ ). Різниця цих відстаней складається з відстані між центрами мас гірки і системи тіл у першому випадку  $\frac{m}{m+M} L_1$  і у другому випадку  $\frac{m}{m+M} L_2$ , тобто

$$S_2 = S - \frac{m}{m+M} L_1 - \frac{m}{m+M} L_2 = S - \frac{m}{m+M} L = \frac{m}{m+M} (v_0 t - L).$$

Не важко переконатися, що остання формула відповідає граничним випадкам, а саме:  $S_2 \rightarrow 0$ , якщо  $m/M \rightarrow 0$  - гірка не відчуває легенького тіла. Що стосується часу  $t$ , безумовно, цікавим є випадок, коли  $t = L/v_0$  і згідно формули  $S_2 = 0$ . Формули не бачать профіль нашої гірки і відповідають також на безліч питань, які лежать поза конкретною задачею. Уявимо, наприклад, гірку з прямим тунелем, скрізь який без затримки проходить тіло. Зрозуміло,  $t = L/v_0$  і  $S_2 = 0$ . Випадок  $t < L/v_0$  також можливий. Якби гірка тягнулася не тільки вгору, але й униз, ковзаючи, наприклад, по рейкам, і в неї був тунель, який спочатку спускався, а потім піднімався, ми б отримали зміщення гірки у зворотному напрямку  $S_2 < 0$ .

Нарешті у випадку, коли тіло мов би завмирає на верхівці гірки  $v_0 = \sqrt{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)gh}$

можна користуватися обома формулами, оскільки час такого підйому на зображену гірку нескінченно великий. У загальному випадку

$$S_{\text{гірки}} = \begin{cases} \frac{mv_0 t}{m+M}, & v_0 \leq \sqrt{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)gh}, \\ \frac{m}{m+M} (v_0 t - L), & v_0 > \sqrt{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)gh}. \end{cases}$$

Цікаво відзначити, що отримані відстані, які пройде гірка, не залежать від того відривається тіло від гірки у процесі руху чи ні, відсутня сила тертя між гіркою і тілом чи в наявності. Якщо тіло повертається назад  $S_1 = \frac{mv_0 t}{m + M}$ , якщо проходить

вперед  $S_2 = \frac{m}{m + M}(v_0 t - L)$ , навіть у тому випадку, коли воно летить і в момент часу  $t$  просто покидає повітряний простір над гіркою.

Нарешті для випадку малих сил тертя між гіркою і поверхнею, зазначимо, що відстань зменшиться, і якщо під час руху не буде зупинок, від отриманих відповідей слід відняти  $\mu g t^2 / 2$ . Але, звичайно, оцінка куди з'їде тіло повинна бути іншою.

**Задача 9.4** Див. 8 клас, задача 4.

**Задача 9.5**

Позначимо на схемі такі точки та опори.

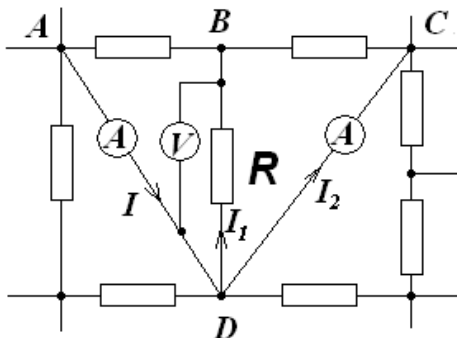
Спочатку з'єднаємо точки А і D амперметром, точки С і D – провідником, до точок А і В під'єднаємо джерело струму, а до резистора R – вольтметр.

У цьому випадку через резистор проходить мите струм  $I$ , через провідник  $I_2$ .  $I = I_1 + I_2$  (1)

Поміняємо провідник і амперметр місцями. Коло не зміниться, оскільки їх опори однакові, у цьому випадку матимемо змогу амперметром визначити струм  $I_2$ . З

рівності (1) знайдемо:  $I_1 = I - I_2$ , а шуканий опір буде:  $R = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I - I_2}$ , де  $U$  – показ

вольтметра.



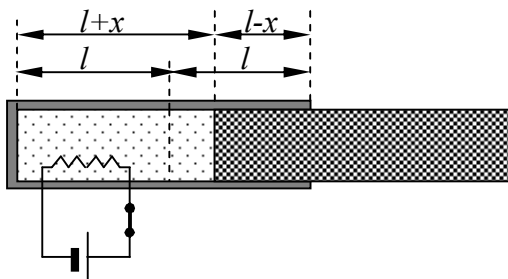
## 10 клас

**Задача 10.1**

Протягом часу  $t_1 = 41,55$  с температура газу лінійно зростає від  $T_0 = 300$  К до  $T_1 = 320$  К (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41,55}{20} = \frac{5}{2} R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності



$C_{12} = C_V$ . Це означає, що протягом часу  $t_1$  після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює  $V_0$ .

При досягненні температури  $T_1$  тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \quad (1)$$

де  $F$  – сила тертя спокою,  $S$  – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right), \quad p(x) = p_A + \frac{F(l-x)}{S l} = p_1 - \frac{F x}{S l}, \quad (2)$$

Виключивши з цих рівнянь величину  $x/l$ , отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F V}{S V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A) \frac{V}{V_0} \quad (3)$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина – тиск  $p_1$ . Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від  $x$  (див. рис. у розв'язку):

$$RT(x) = V_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left( p_1 - \frac{F x}{S l} \right). \quad (4)$$

Температура газу досягає максимуму  $T_m = 360$  К (рис 2) при деякому значенні  $x_m/l$ , яке може бути визначене з умови екстремуму функції  $T(x)$  як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2} \frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \quad (5)$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що  $p_1 V_0 = RT_1$ , отримуємо квадратне рівняння відносно величини  $p_A/p_1$

$$4 \left( \frac{T_m}{T_1} - 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{p_A}{p_1} \right) \right) = \left( \frac{p_A}{p_1} \right)^2$$

Розв'язуючи рівняння при підстановці числових значень  $T_1$  та  $T_m$  отримуємо  $p_1 = 2p_A$ . Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p = p_A \left( 3 - \frac{V}{V_0} \right) \quad \text{або} \quad \frac{V}{V_0} = 3 - \frac{p}{p_A}. \quad (6)$$

Початковий об'єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1 \frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8} p_A. \quad \text{Рівняння (6) можна записати у вигляді:} \quad \frac{V(3 - V/V_0)}{T} = const.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об'єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки

посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2} R dT + p dV. \text{ Звідки теплоємність газу}$$

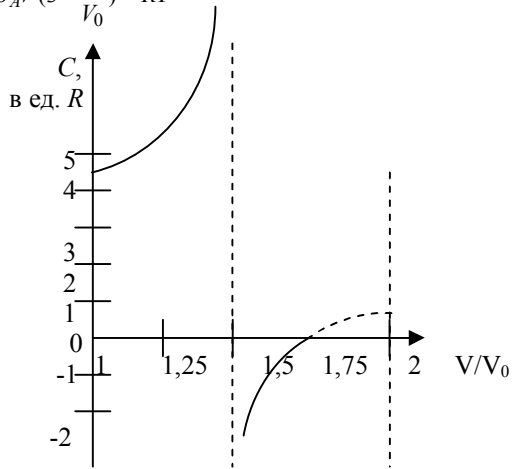
$$C = \frac{5}{2} R + p \frac{dV}{dT}. \text{ Із рівняння стану } p_A V \left(3 - \frac{V}{V_0}\right) = RT$$

$$\text{отримаємо } \frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3 - 2V/V_0)p_A}.$$

Так як  $p = p_A(3 - V/V_0)$ , то

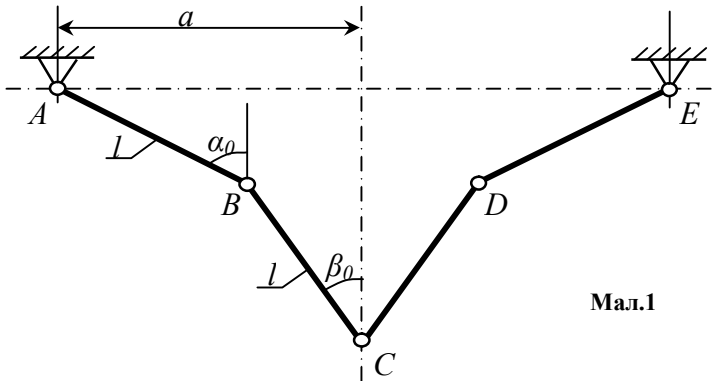
$$C = \frac{5}{2} R + \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} R.$$

На графіку схематично зображено залежність  $C = f(V/V_0)$ . Як бачимо, при  $1,5 < V/V_0 < 1,75$  теплоємність від'ємна.



### Задача 10.2

Згідно даних задачі очевидно, що в момент початку руху системи  $\alpha_0 = 60^\circ$ ,  $\beta_0 = 30^\circ$  (мал.1)



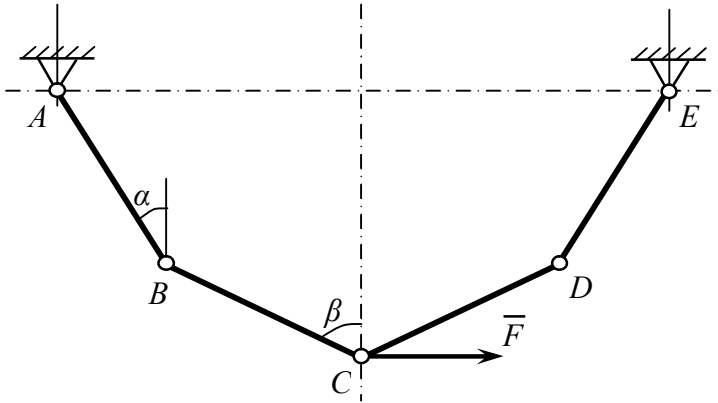
Мал.1

З часом система набуде стану стійкої рівноваги (мал. 2). Сила  $F$ , що діє з боку правої частини системи на ліву, в силу симетрії системи направлена так, як показано на мал. 2. Запишемо умову рівноваги стержня BC відносно точки B:

$$Fl \cos \beta - mg \frac{l}{2} \sin \beta = 0. \text{ Звідси } F = \frac{mg \sin \beta}{2 \cos \beta}. \quad (1)$$

Тепер запишемо умову рівноваги лівої частини системи відносно точки A:

$$F(l \cos \alpha + l \cos \beta) - mg \frac{l}{2} \sin \alpha - mg(l \sin \alpha + \frac{l}{2} \sin \beta) = 0.$$



Мал.2

Тепер запишемо умову рівноваги лівої частини системи відносно точки А:

$$F(l \cos \alpha + l \cos \beta) - mg \frac{l}{2} \sin \alpha - mg(l \sin \alpha + \frac{l}{2} \sin \beta) = 0.$$

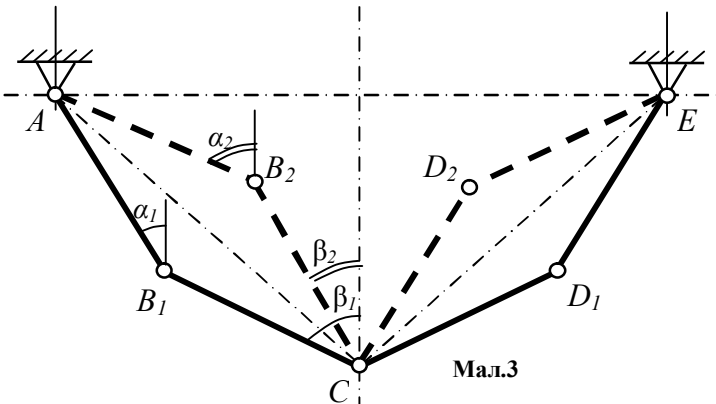
Звідси:  $F = \frac{mg}{2} \frac{3 \sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$  (2) Прирівняємо (1) і (2):  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3 \sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ .

Звідси:  $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$  (3) Шарнір С переміщується тільки по вертикалі, тому

$$l \sin \alpha + l \sin \beta = a = l \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \text{ або } \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Дослідимо систему рівнянь (3) та (4). Рівнянню (4) відповідають ті значення кутів  $\alpha$  і  $\beta$ , при яких точка С знаходиться на осі симетрії. Таких пар значень  $\alpha$  і  $\beta$  безліч.

Рівняння (3) виділяє з цієї безлічі конкретну пару кутів  $\alpha_1$  та  $\beta_1$ , яка відповідає умові стійкої рівноваги.



Мал.3



Значення  $\alpha_1$  і  $\beta_1$  можна визначити, розв'язуючи вказану систему чисельними методами. Але дана механічна система має ще одну особливість. Положенню точки С при стійкій рівновазі системи відповідає ще одна пара кутів  $\alpha_2$  і  $\beta_2$ . Це впливає з, що коли існує трикутник  $AB_1C$ , то при тих же положеннях шарнірів А і С існує також трикутник  $AB_2C$  (мал.3). Або це впливає також з рівняння (4), згідно якого  $\alpha$  і  $\beta$  можна поміняти місцями.

Все сказане відповідає заміні  $\alpha_1 = \beta_2$  та  $\beta_1 = \alpha_2$ . Така заміна трансформує умову (3) стійкої рівноваги в умову (5) існування другого розв'язку для заданого положення шарніра С. Одержимо 
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 3 \operatorname{tg} \beta_2. \quad (5)$$

Так як при  $\alpha_2 = \alpha_0 = 60^\circ$  та при  $\beta_2 = \beta_0 = 30^\circ$  умова (5) виконується, то робимо висновок, що початкове положення шарніра С співпадає з його положенням за умови стійкої рівноваги.

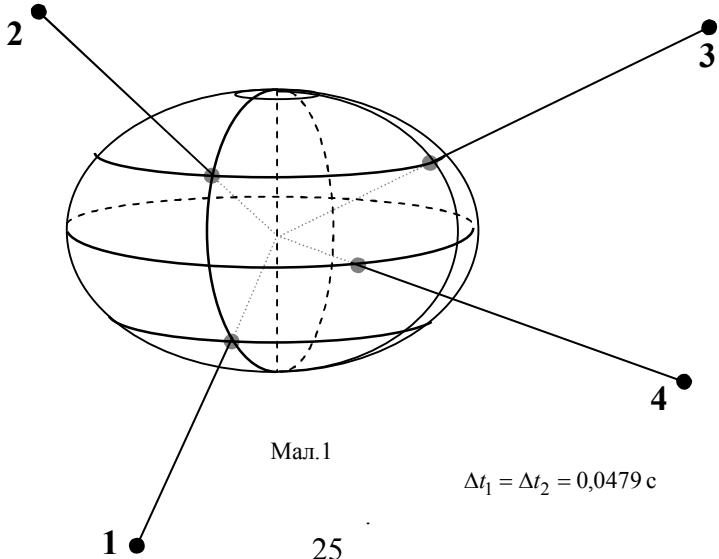
Отже, шарнір С після перерізування нитки не зміститься, а за стійкої рівноваги  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ .

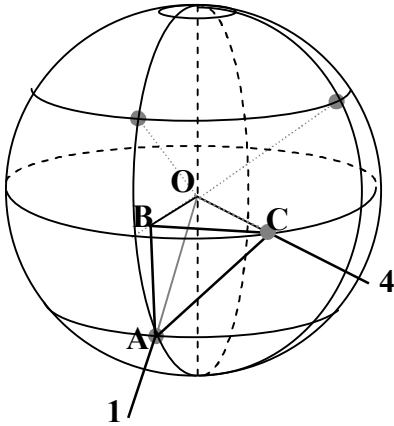
Кількість тепла  $Q$ , що виділиться по закінченні руху системи, дорівнює зменшенню її потенціальної енергії. Враховуючи незмінність положень точок А, С і Е, одержимо

$$\begin{aligned} Q &= 2m\left(\frac{l}{2} \cos \alpha_1 - \frac{l}{2} \cos \alpha_0\right) + 2m\left(\frac{l}{2} \cos \beta_0 - \frac{l}{2} \cos \beta_1\right) = 2mgl(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = \\ &= mgl(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

### Задача 10.3

Схематично зобразимо положення супутників (див. мал.1.) Зазначимо, що різниця часу відправлення і отримання сигналів від перших двох супутників однакова





Мал.2.

Отже приймач знаходиться в площині екватору. Також однаковою є різниця часу відправлення і отримання сигналів від другого і третього супутників  $\Delta t_2 = \Delta t_3 = 0,0479$  с. Отже приймач знаходиться в площині меридіану  $45^\circ$ . Дві площини перетинаються вздовж лінії з координатами четвертого супутника. Таким чином, приймач знаходиться безпосередньо під четвертим супутником. Перед тим як розглянути надходження сигналів до приймача від першого і четвертого супутників визначимо кут, який утворюють напрями на ці супутники з центру планети.

Оскільки за умовою кути  $\text{AOB}$  і  $\text{BOC}$  дорівнюють  $45^\circ$ ,  $AB = BC = R/\sqrt{2}$ , де  $R$  - відстань від центру планети до спостерігача (див. Рис.2). Отже  $AC = R$  і трикутник  $OAC$  є рівностороннім з кутами по  $60^\circ$ . Розглянемо тепер площину цього трикутника (Рис.3). Позначимо через  $\Delta\tau$  розходження у часі між годинником приймача і точним часом  $t$  супутників. Тоді відстань між спостерігачем (точка  $C$ ) і 4-м супутником  $r - R = c(\Delta t_4 + \Delta\tau)$ , а відстань між спостерігачем і 1-м супутником  $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos 60^\circ} = c(\Delta t_1 + \Delta\tau)$ .

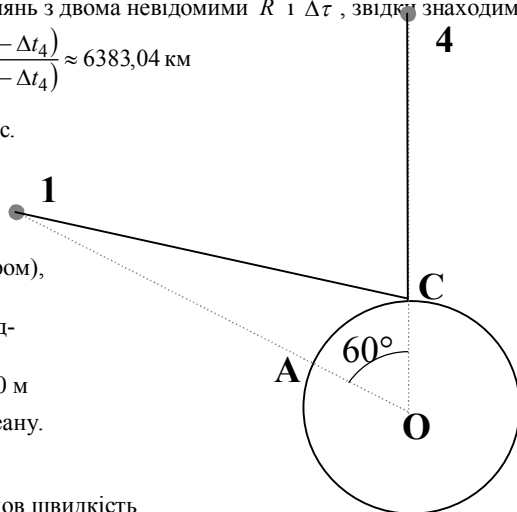
Маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими  $R$  і  $\Delta\tau$ , звідки знаходимо:

$$\begin{cases} R = c(\Delta t_1 - \Delta t_4) \frac{2r + c(\Delta t_1 - \Delta t_4)}{r + 2c(\Delta t_1 - \Delta t_4)} \approx 6383,04 \text{ км} \\ \Delta\tau = \frac{r - R}{c} - \Delta t_4 \approx 0,0111 \text{ с.} \end{cases}$$

Отже повітряна куля знаходиться у точці з координатами  $0^\circ 00' 00''$  широти (тобто над екватором),  $45^\circ 00' 00''$  східної довготи (неподалік від східного узбережжя Африки), на висоті  $R - R_e \approx 4 \text{ км } 890 \text{ м}$  над рівнем Індійського океану.

#### Задача 10.4

Як відомо, за ідеальних умов швидкість вильоту води з отвору можна знайти або з



Мал.3.

рівняння Бернуллі, або з закону збереження енергії (з урахуванням великої площі перерізу діжки  $v = \sqrt{2gh}$  - формула Торрічеллі). В реальних умовах швидкість завжди дещо менша і залежить від форми отвору (обговорення цього питання можна знайти, наприклад, у Фейнманівських лекціях з фізики). Тому будемо вважати, що  $v_1 = \alpha\sqrt{2gh_1} = \alpha\sqrt{2gh}$ ,  $v_2 = \alpha\sqrt{2gh_2}$ ,

де  $\alpha$  – деяке менше за одиницю безрозмірне число, однакове для обох отворів внаслідок їх подібності,  $h_2$  - глибина другого отвору. Знайдемо положення точки перетину струменів. У вертикальному напрямку за деякий час  $t$  вода опускається на відстань  $y = \frac{gt^2}{2}$ , у горизонтальному – зміщується на відстань  $x = vt$ . Таким чином,

для системи координат з початком у точці виходу першого струменя і спрямованою вниз віссю ординат, маємо наступні рівняння ліній першого і другого струменів:

$$y_1 = \frac{gx_1^2}{2v_1^2}, \quad y_2 = \Delta h + \frac{gx_2^2}{2v_2^2},$$

де  $\Delta h = h_2 - h_1$  відстань між отворами. Оскільки в точці перетину координати співпадають  $x_1 = x_2 \equiv x_0$ ,  $y_1 = y_2 \equiv y_0$ , з урахуванням виразу для швидкостей

знаходимо: 
$$\begin{cases} x_0 = 2\alpha\sqrt{h_1h_2}, \\ y_0 = h_2. \end{cases}$$

Тобто точка перетину струменів нижча від другого отвору на відстань  $y_0 - \Delta h = h_1$ .

Дивний і красивий результат. Виявляється, точка перетину струменів буде завжди нижча за нижній отвір на відстань між верхнім отвором і поверхнею води (не зважаючи на те, яка відстань між самими отворами). В нашому випадку це  $h=10$  см. Єдине застереження це сторонні предмети, які можуть завадити перетину струменів. В нашому випадку – поверхня столу, від якої нижній отвір повинен бути віддаленим щонайменше на ті ж самі 10 см.

Перейдемо до другої частини задачі. За умовою другий отвір зроблений на відстані

$h_2 = 4h$  від поверхні води. Тоді 
$$\begin{cases} x_0 = 4ah, \\ y_0 = 4h, \\ v_2 = 2\alpha\sqrt{2gh} = 2v_1. \end{cases}$$

Швидкість народженого в точці  $(x_0; y_0)$  нового струменя знайдемо із закону збереження імпульсу. Маса води, яка проходить через отвір площею перерізу  $S$  за одиницю часу, дорівнює

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v. \text{ Для першого і другого отворів маємо}$$

$q_1 = \rho S_1 v_1 = \alpha \rho S_1 \sqrt{2gh}$ ,  $q_2 = \rho S_2 v_2 = \alpha \rho S_2 \cdot 2v_1 = q_1$ . Виявляється, змішуються рівини маси рідини обох струменів. Тоді закон збереження імпульсу зведеться до визначення середньоарифметичних швидкостей. У горизонтальному напрямку швидкості струменів залишаються незмінними, отже після з'єднання

$$v_x = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3}{2} v_1. \quad \text{У вертикальному напрямку}$$

$$v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{2gy_0} + \sqrt{2g(y_0 - \Delta h)}) = \frac{3}{2} \sqrt{2gh}. \quad \text{Для того, щоб знайти відстань}$$

від діжки, на якій опиниться струмінь, знизившись до рівня отвору стакану, знайдемо спочатку час  $\tau$  такого зниження. Точка перетину знаходиться на висоті

$$H - h - y_0 = 5h \quad \text{над поверхнею, а висота стакану } h. \quad \text{Отже } 4h = v_y \tau + \frac{g\tau^2}{2} \quad \text{або}$$

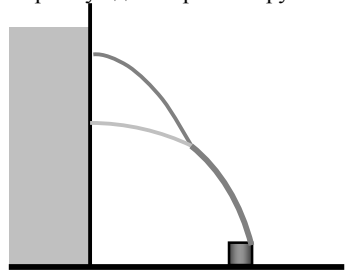
$g\tau^2 + 3\sqrt{2gh}\tau - 8h = 0$ . Додатний корінь квадратного рівняння  $\tau = \sqrt{2h/g}$ . За цей час в горизонтальному напрямі струмінь зміститься на

$$l = v_x \tau = \frac{3}{2} \alpha \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2h/g} = 3ah \quad \text{і опиниться на відстані } L = x_0 + l = 7ah \quad \text{від діжки.}$$

Стакан знаходиться від діжки на відстані 6 своїх діаметрів  $d$ . Цю ж відстань за умовою задачі спочатку долав у горизонтальному напрямку один перший струмінь. Тобто,

$$6d = v_1 t = \alpha \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2(H-h)/g} = 6ah.$$

Отже  $d = ah$  і тоді  $L = 7d$ . Струмінь буде попадати у верхню крайню точку стакану (що може призвести навіть до перевертання останнього). Під час розрахунків ми знехтували опором повітря, впливом сил поверхневого натягу на рух струменя, завдяки яким той власне й утворює одне ціле. Навіть у цьому випадку завдяк товщині струменя вода буде частково попадати у стакан. Відповідь на останнє питання в ідеалізованому випадку: струмінь перелітатиме стакан, якщо  $S_1/S_2 < 2$ .



### Задача 10.5

Скористаємося методом електростатичних зображень.

1) Під час переміщення точкового заряду можна вважати заряд-зображення нерухомим. Отже, виконана під час переміщення робота  $A = -k \frac{q^2}{3a} + k \frac{q^2}{2a} = k \frac{q^2}{6a}$ .

(ми збільшили відстань між зарядами від  $2a$  до  $3a$ ). За умовою ця робота  $A = 36 \text{ мкДж}$ . Застосуємо тепер закон збереження енергії:  $W_1 + A = W_2 + Q$ .

Початкова енергія кулонівської взаємодії заряду з площиною  $W_1 = -1/2 \cdot kq^2/2a$ , а

кінцева енергія  $W_2 = -1/2 \cdot kq^2 / 4a$ . Ми врахували, що енергія взаємодії реального заряду з його зображенням удвічі менша, ніж енергія взаємодії двох відповідних реальних зарядів (досить згадати, що реальне електричне поле існує тільки

півпросторі). Таким чином,  $Q = W_1 - W_2 + A = k \frac{q^2}{24a} = \frac{1}{4} A = 9 \text{ мкДж}$ .

2) У цьому випадку легко помітити, що енергія кулонівської взаємодії не змінюється (можна вважати, що просто змінилися на протилежні знаки всіх зарядів). Отже, згідно з законом збереження енергії  $Q = A = 36 \text{ мкДж}$ .

### 11 клас

#### Задача 11.1

Протягом часу  $t_1 = 41,55 \text{ с}$  температура газу лінійно зростає від  $T_0 = 300 \text{ К}$  до  $T_1 = 320 \text{ К}$  (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41,55}{20} = \frac{5}{2} R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності  $C_{12} = C_V$ . Це означає, що протягом часу  $t_1$  після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює  $V_0$ .

При досягненні температури  $T_1$  тиск газу в посудині зростає до значення

$p_1 = \frac{F}{S} + p_A(1)$ , де  $F$  – сила тертя спокою,  $S$  – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right), \quad p(x) = p_A + \frac{F(l-x)}{S l} = p_1 - \frac{F x}{S l}, \quad (2)$$

Виключивши з цих рівнянь величину  $x/l$ , отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F V}{S V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A) \frac{V}{V_0} \quad (3)$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина – тиск  $p_1$ . Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від  $x$  (див. рис. у розв'язку):

$$RT(x) = V_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left( p_1 - \frac{F x}{S l} \right) \quad (4)$$

Температура газу досягає максимуму  $T_m = 360 \text{ К}$  (рис 2) при деякому значенні  $x_m / l$ , яке може бути визначене з умови екстремуму функції  $T(x)$  як вершина параболі:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2} \frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \quad (5)$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що  $p_1 V_0 = RT_1$ , отримуємо квадратне рівняння

$$\text{відносно величини } p_A / p_1: \quad 4 \left( \frac{T_m}{T_1} - 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{p_A}{p_1} \right) \right) = \left( \frac{p_A}{p_1} \right)^2$$

Розв'язуючи рівняння при підстановці числових значень  $T_1$  та  $T_m$  отримуємо  $p_1 = 2p_A$ . Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме

$$\text{вигляд:} \quad p = p_A \left( 3 - \frac{V}{V_0} \right) \quad \text{або} \quad \frac{V}{V_0} = 3 - \frac{p}{p_A}. \quad (6)$$

Початковий об'єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1 \frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8} p_A. \quad \text{Рівняння (6) можна записати у вигляді:} \quad \frac{V(3 - V/V_0)}{T} = \text{const}.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об'єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2} R dT + p dV. \quad \text{Звідки}$$

теплоємність газу

$$C = \frac{5}{2} R + p \frac{dV}{dT}. \quad \text{Із рівняння}$$

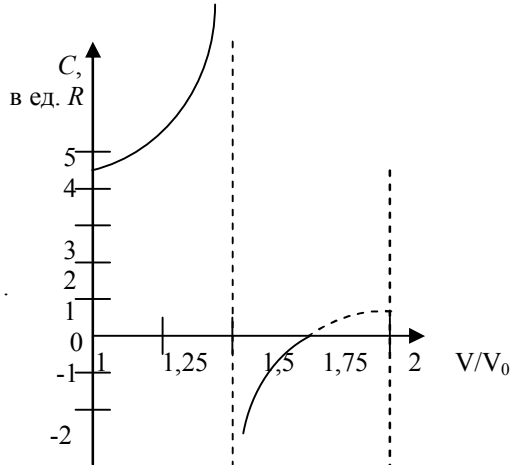
$$\text{стану } p_A V \left( 3 - \frac{V}{V_0} \right) = RT$$

$$\text{отримаємо} \quad \frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3 - 2V/V_0)p_A}.$$

Так як  $p = p_A (3 - V/V_0)$ , то

$$C = \frac{5}{2} R + \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} R.$$

На графіку схематично зображено залежність  $C = f(V/V_0)$ . Як бачимо, при  $1,5 < V/V_0 < 1,75$  теплоємність від'ємна.



### Задача 11.2

Для напрямку обходу контура, зображеного на мал.1, справедливі наступні рівняння і співвідношення:

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = E$$

або  $q'' + \omega^2 q = \frac{E}{L}$ , де  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$  і  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Якщо ввести нову змінну  $(q - EC)$ , то рівняння

коливань набуває вигляду:  $(q - EC)'' + \omega^2(q - EC) = 0$  (1)

а його рішення  $q = A \cos \omega t + EC$ .

Амплітуда  $A$  і початкова фаза  $\varphi$  визначаються з початкових умов  $q(0) = 0$  і  $i(0) = 0$ .

Тоді  $q(t) = EC(\cos \omega t - 1)$  и  $i(t) = \omega EC \sin \omega t$ . (2)

Напруга і заряд на конденсаторі будуть максимальними через півперіода. При цьому

$$q_{\max} = -2EC. \quad (3)$$

**Перше переключення.** Для контура, зображеного на мал.2, початкові умови наступні:  $q(0) = |q_{\max}|$ ,  $i(0) = 0$ . Для обраного напрямку обходу застосовуємо друге правило

Кірхгофа  $-\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = E$  і  $i = -\frac{dq}{dt}$ , (4)

а рівняння коливань зводиться до вигляду:

$$(q + EC)'' + \omega^2(q + EC) = 0. \quad (5)$$

Тоді  $q = A \cos(\omega t + \varphi) - EC$ .

З врахуванням нових початкових умов отримаємо:

$A = 3EC$  і, таким чином, після першого

переключення  $q_1(t) = EC(3 \cos \omega t - 1)$  і

$$i_1(t) = 3\omega EC \sin \omega t, \quad (6)$$

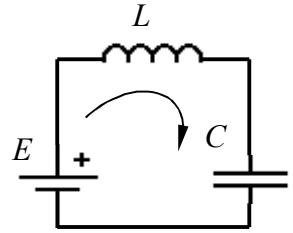
а максимальна напруга на конденсаторі  $U_{1\max} = 4E$ .

Очевидно, що при наступних переключеннях коливання описуються рівнянням (5), а початкові умови визначаються модулями максимальних значень заряду на конденсаторі і нульовим струмом. Узагальнюючи результати (6) на  $n$  переключень, отримаємо:

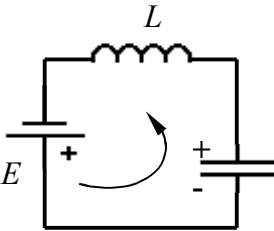
$$q_n(t) = EC[(2n + 1) \cos \omega t - 1], \quad i_n(t) = \omega EC(2n + 1) \sin \omega t \quad (7)$$

Напруга на конденсаторі  $U_{n\max} = 2(n + 1)E$ ,  $i_{n\max} = (2n + 1)\omega EC$ .

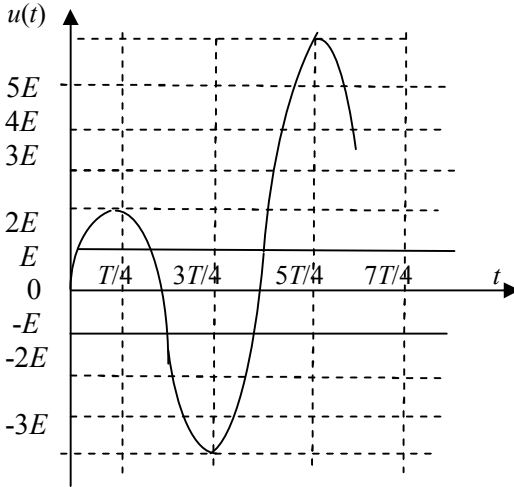
На мал.3 показано залежності напруги на конденсаторі і струму в контурі від часу при зміні полярності джерела кожні півперіода при відсутності втрат.



Мал.1



Мал.2



Мал.3

**Розглянемо контур з втратами.** Оскільки  $r \ll \rho = \sqrt{L/C}$ , то зміни амплітуди струму і напруги за півперіода, а також додатковим фазовим зсувом між струмом і напругою можна знехтувати і користуватись вже отриманими результатами. Амплітуда напруги на конденсаторі і струм в контурі будуть залишатись незмінними при досягненні такого значення, при якому енергія, що підводиться за півперіода від джерела, буде рівна енергії втрат.

Нехай енергетичний баланс у контурі встановився через  $n$  переключень. Розрахуємо енергію  $W$ , яку контур отримує від джерела за півперіода:

$$W = \int_0^{T/2} E i_n(t) dt = E^2 C \omega (2n+1) \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = 2E^2 C (2n+1) \quad (8)$$

Енергія, що втрачається за цей час:

$$W_r = \int_0^{T/2} i_n^2(t) r dt = \omega^2 E^2 C^2 r (2n+1)^2 \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt = \frac{\pi}{2} \frac{r}{\sqrt{L/C}} E^2 C (2n+1)^2 \quad (9)$$

Прирівнюючи вирази (8) і (9), отримаємо  $2n+1 = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{L/C}}{r}$ . Т.к.  $\sqrt{L/C} \gg r$ , то  $n$

$\gg 1$  і  $n \cong \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{L/C}}{r}$ . Тоді з використанням (7) отримаємо:

$$u(t) = E \left( \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{L/C}}{r} \cos \omega t - 1 \right) \approx E \left( \frac{\sqrt{L/C}}{r} \cos \omega t - 1 \right) i$$

$$i(t) = \frac{4}{\pi} \omega C E \frac{\sqrt{L/C}}{r} \sin \omega t \approx \frac{E}{r} \sin \omega t.$$

Якщо втрати в контурі зумовлені внутрішнім опором джерела струму то отриманий результат очевидний – сила струму в контурі не може перевищити силу струму короткого замикання.



### Задача 11.3

1) Запишемо вирази для довжини шляху  $L^\pm$  в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямком руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :

$L^\pm = 2\pi R + R\Omega t^\pm$ , де  $R$  – радіус кільця,  $\Omega$  – кутова швидкість обертання,  $t^\pm$  - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо  $V_\phi$  – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей

$$V_\phi^\pm = \frac{V_\phi \pm R\Omega}{1 \pm \frac{V_\phi R\Omega}{c^2}}, \text{ де } c - \text{швидкість світла. Тоді часи } t^+ \text{ і } t^- \text{ визначаються, як}$$

$$\text{відношення } \frac{L^+}{V_\phi^+} \text{ і } \frac{L^-}{V_\phi^-} \text{ відповідно: } t^\pm = \frac{L^\pm}{V_\phi^\pm} = \frac{2\pi R(1 \pm \frac{V_\phi R\Omega}{c^2})}{V_\phi(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}, \text{ звідки знаходимо}$$

$$\text{шукану різницю розповсюдження зустрічних хвиль } \Delta t = t^+ - t^- = \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}$$

2), 3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку  $k'$ , яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку  $k'$  є

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}, \text{ а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з}$$

$$\text{кільця } \Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4S\Omega\omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}} \text{ (} S - \text{площа кільця).}$$

### Коментар

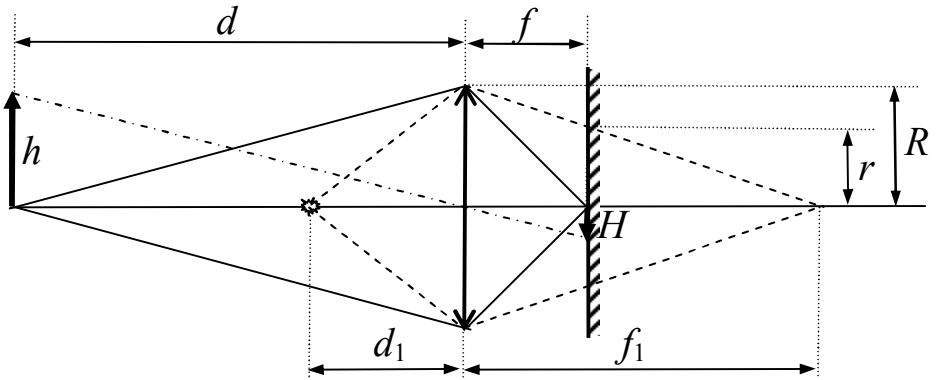
Запропонована задача описує так званий ефект Саньяка:

Ефект Ж.Саньяка (1913) поряд з експериментом Майкельсона-Морлі є одним з основоположних дослідів спеціальної теорії відносності. Дослід Саньяка довів принципову можливість експериментального визначення кутової швидкості

обертання системи спостерігачем, розташованим всередині системи, тобто можливість визначення неінерційного руху системи для спостерігача, який є нерухомим відносно цієї системи.

**Задача 11.4**

Фотоапарат фокусує чітке зображення людини на матриці або фотоплівці. При цьому предмети, які знаходяться ближче або далі не будуть чіткими. Зображення маленьких краплинок перед об'єктивом буде утворюватись далеко позаду матриці, на якій потік світла від краплинки залишає блідну прозору пляму радіусом  $r$  (див. Рис.).



Запишемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \\ \frac{R}{f_1} = \frac{r}{f_1 - f}, \\ \frac{h}{H} = \frac{d}{f}. \end{cases}$$

Розміри, які ми міряємо на фотографії ( $H'$  і  $r'$ ) не співпадають з розмірами на матриці ( $H$  і  $r$ ), але  $H'/r' = H/r$ . З урахуванням останнього рівняння з системи знаходимо  $d_1 = \frac{d}{1 + \frac{h}{H'} \frac{r'}{R}}$ . Висота кадру відповідає висоті  $h \approx 1$  м. Для першої краплинки  $r'/H' \approx 1/6$ , для другої  $r'/H' \approx 9/80$ . Отже  $d_1 \approx 17$  см,  $d_2 \approx 24,5$  см. Аналогічні результати для відстані від краплинки до площини лінзи об'єктиву

отримуємо, якщо краплинка знаходиться не на головній оптичній осі. Для не дуже великих кутів це є досить точною оцінкою відстаней, які треба знайти.

Зауважимо, що розв'язок задачі відповідає випадку повністю відкритої діафрагми, на що вказує зйомка у печері за наявності у людини ліхтаря. Також можна було б розглянути випадок, коли краплинка ближче до об'єктиву ніж його фокусна відстань. Особливості цього розв'язку більшою мірою пов'язані з конструктивними особливостями фотоапарату (розмірами матриці, тощо...). Нарешті ідея, що концентричні кола, а з ними і сама природа кругів пов'язані з дифракційними явищами на отворі об'єктиву, не витримує оціночних розрахунків.

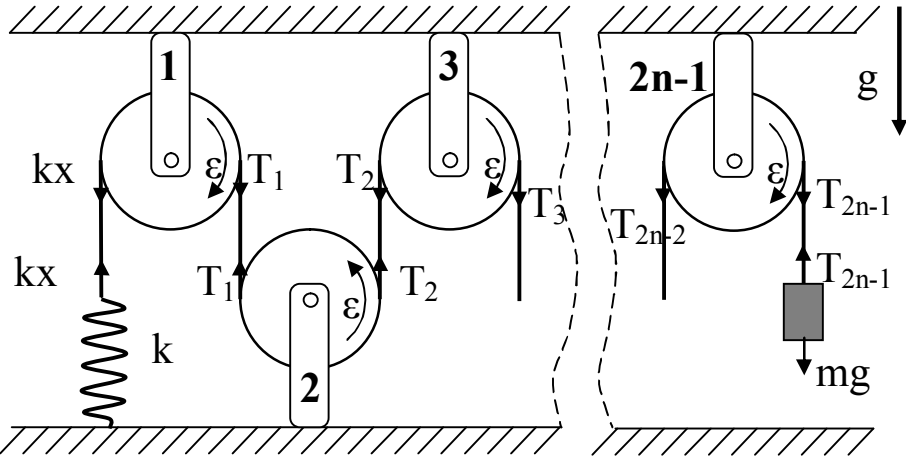
Середня яскравість  $E_1$  кола на фотографії пропорційна відношенню світлової енергії  $W_1$  до площі кола  $\pi r_1^2$ , на яку вона падає. Енергія  $W_1$  пропорційна до добутку енергії  $W_0$ , яку віддзеркалює пилінка, і тілесного куту, який спирається на площу об'єктива  $\Omega = \frac{\pi R^2}{d_1^2}$ . Енергія  $W_0$  пропорційна до добутку енергії  $W$ , яка випромінюється, і тілесного куту, який спирається на площу пилінки

$\Omega = \frac{S}{d_1^2}$ . Отже,  $E_1 = \alpha \frac{WR^2S}{d_1^4 r_1^2}$  - величина обернено пропорційна четвертій степені відстані. Аналогічний вигляд має співвідношення для другої пилінки. Якщо  $E_1 = E_2$ , маємо  $d_1^2 r_1 = d_2^2 r_2$ . З урахуванням попередніх рівнянь знаходимо:

$$d_1 + d_2 = d, \quad d_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_1'/r_2'}}, \quad d_2 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_2'/r_1'}}$$

**Задача 11.5**

На малюнку показано введені позначення, сили, що діють у системі та



прискорення які набудуть блоки при обертанні в одному з напрямів. Внаслідок кінематичної в'язі всі кутові прискорення блоків однакові, а прискорення тіла  $m$  пов'язане з кутовим прискоренням блоків співвідношенням:  $a = \varepsilon r$ .

Запишемо рівняння руху блоків: 1-й блок:  $J \cdot \varepsilon = (T_1 - kx) \cdot r$ ; 2-й блок:  $J \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1) \cdot r$ ; 3-й блок:  $J \cdot \varepsilon = (T_3 - T_2) \cdot r$ ;

.....  
 2n-2-й блок:  $J \cdot \varepsilon = (T_{2n-2} - T_{2n-3}) \cdot r$ ;      2n-1-й блок:  $J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - T_{2n-2}) \cdot r$ ,

де  $J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2$  момент інерції блока, як однорідного циліндру.

Додавши праві та ліві частини виписані виписаних рівнянь, маємо:

$$(2n-1) \cdot J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - kx) \cdot r \quad (1)$$

$$\text{Рівняння руху тягарця:} \quad m \cdot a = m \cdot g - T_{2n-1} \quad (2)$$

$$\text{З рівнянь 1 та 2 з урахуванням зв'язку } a = \varepsilon \cdot r \text{ маємо:} \quad (3)$$

Нехай  $x = x_0 + \Delta x$ , де  $x_0$  – значення  $x$  в стані рівноваги:  $m \cdot g - k \cdot x_0 = 0$

Тоді рівняння (3) можна записати так:  $\left( \frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m \right) \cdot a = -k \cdot \Delta x$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою  $\omega$ :  $\omega^2 = \frac{k}{\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m}$

$$\text{Звідки період коливань:} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m}{k}}$$

Науково-популярне видання

*Міністерство освіти і науки України  
Львівський фізико-математичний ліцей  
при Львівському національному університеті  
імені Івана Франка*

**“ЛЕВЕНЯ – 2008”  
ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ**

*Інформаційний вісник*

Уклали *Алексейчук Володимир Іванович*  
*Кузик Раїса Григорівна*  
*Назарків Людмила Богданівна*

Технічний редактор *Леся Пелехата*  
Коректор *Євдокія Русин*

Здано на складання 23. 06. 07р. Підписано до друку 23. 07. 07р.

Формат 60 x 84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times.

Друк офсетний. Умов. друк. арк 1,628

Обл. вид. арк. 1,55. Наклад 6 000 прим.

Видавництво “Каменярь” 79000. Львів, МСП, Підвальна,3

Свідоцтво Держ. реєстру: серія ДК, № 462

Ел.адреса: [vyd\\_kamenyar@mail.lviv.ua](mailto:vyd_kamenyar@mail.lviv.ua)

Віддруковано з готових діапозитивів на ФОП Савенкова О.Ю.

79031, Львів, вул. Ярослава Гашека, 18/11.