Міністерство освіти і науки України

Львівський фізико-математичний ліцей
при Львівському національному університеті
імені Івана Франка

„ЛЕВЕНЯ – 2006” ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник

Львів
Каменяр
2006

ББК 74.265.1-922
Л35
УДК 372.853

Цю книжку оргкомітет конкурсу підготував для переможців, сподіваючись, що зібрані в ній матеріали будуть корисними для учнів, які цікавляться різними видами інтелектуальних змагань (як-от олімпіади, конкурси, турніри) з фізики та для вчителів, які їх готуватимуть.

Директор ліцею **Мар'ян Добосевич**

Оргкомітет конкурсу "Левеня – 2006"
Володимир Алексейчук
Раїса Кузик
Людмила Назарків
Олена Хоменко

Адреса оргкомітету:
79054, Львів, вул. Караджича, 29
Львівський фізико-математичний ліцей
Тел. (032) 240-17-02, (0322) 62-00-68
Факс. (032) 240-17-02
E-mail: levenia@polynet.lviv.ua
http:// levenia.com.ua

Директор благодійного фонду "Ліцей" **Михайло Муращук**

Благодійний фонд "Ліцей"
Львівське відділення Укрексімбанку
рахунок отримувача 260030260560
МФО 325718
ЗКПО 22360064
Автор логотипу **Орест Бурак**

$\text{В}\ \dfrac{4306021200 - 24}{2006}$ Без оголошення

ISBN 5-7745-0398-4

Дорогі переможці конкурсу "Левеня-2006"!

Щиро вітаємо Вас із перемогою у Всеукраїнському фізичному конкурсі "Левеня", який уже традиційно протягом п'яти років проводиться Львівським фізико-математичним ліцеєм при Львівському національному університеті імені Івана Франка за підтримки Міністерства освіти і науки України серед учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

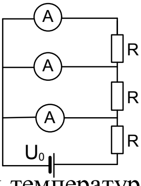
За ці роки понад 50 тисяч учнів об'єдналися завдяки конкурсу у велику фізичну спільноту, з метою вирішення запитань, що ставить перед людством велика чарівниця-Природа. Адже проведення таких щорічних змагань дає змогу залучити до участі в них школярів із найвіддаленіших куточків країни, привернути увагу педагогів до розвитку інтелектуальних здібностей дітей, їх таланту, дає можливість стимулювати інтерес до вивчення фізики.

Світ довкола нас невпинно змінюється, і щоб бути успішним та переможним у ньому, треба мати неабияку духовну міць, уміти стрімко реагувати на процеси оновлення нашого буття, прагнути самовдосконалення. Сподіваємося, що такі змагання, як конкурс "Левеня", допоможуть Вам успішно підготуватися до наступних випробувань. Адже багато з вас мріють продовжувати навчання у вищій школі, освоїти цікаву й корисну професію, що пов'язана з розв'язанням нових таємниць фізичного знання, винайденням новітніх технологій, які дозволять підвищити рівень усього суспільства, якість життя людей.
Успіхів вам, дорогі школярі, світлих, чесних і почесних перемог на життєвім шляху, віри у свої сили та можливості!

Олена Вікторівна Хоменко,
головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України

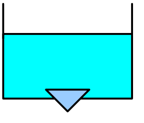
Міністерство освіти і науки України
XLII Всеукраїнська олімпіада юних фізиків, м. Одеса, 2006

Теоретичний тур
8 клас



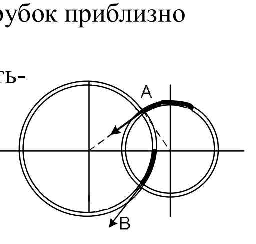
1. У схемі, зображеній на рисунку, всі амперметри однакові і всі резистори R однакові. Верхній амперметр показує силу струму $I_в = 1$ мА, середній – силу струму $I_c = 4$ мА. Напруга ідеального джерела напруги $U_0 = 4{,}5$ В. Що показує нижній амперметр? Чому дорівнює опір резисторів R?

2. У теплоізольовану посудину помістили $m_1 = 4$ кг льоду при температурі $t_1 = -20\ ^0$C, $m_2 = 4$ кг води при температурі $t_2 = 50\ ^0$C і $m_3 = 100$ г пари при температурі $t_3 = 100\ ^0$C. Визначити температуру в посудині, а також маси води, льоду та пари після встановлення теплової рівноваги. Питома теплота плавлення льоду $\lambda = 340$ кДж/кг, питома теплоємність льоду та води відповідно $c_1 = 2{,}1$ кДж/(кг$\cdot ^0C$) і $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг$\cdot ^0C$), питома теплота пароутворення води r = 2300 кДж/кг.



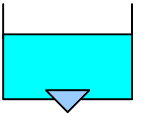
3. Отвір у дні посудини щільно закритий конічним корком. Площа основи корка **S**, висота **L**. Рівень дна посудини перетинає конус на половині його висоти. Густина корка та рідини дорівнює відповідно ρ_0 і ρ . Якою повинна бути мінімальна висота рівня рідини $\mathbf{H_m} > 0$ над основою конуса, щоб корок не спливав? Яку зовнішню силу **F**, напрямлену вгору, треба прикласти до корка, щоб його витягти, якщо висота рівня рідини над основою конуса $H > H_m$? Примітка: об'єм конуса V = SL/3.

4. Телескопічний реостат складається з трьох металевих тонкостінних трубок однакової довжини, які щільно вставлені одна в одну. Побудувати залежність опору реостата від його довжини. Напруга прикладається до кінців реостата. Довжина кожної трубки 50 см, радіус трубок приблизно 5 см, товщина стінок 0,1 мм, питомий опір 10^{-7} Ом*м.



5. Дві дитячі залізниці мають вигляд кіл, що перетинаються в точках A та B. Одночасно з цих точок відправляються два однакові потяги, кожен уздовж своєї колії. Визначити, через який час після початку руху відбудеться „залізнична аварія". Відомо, що потяг за 5 с проїжджає нерухому точку, а за 1 хв робить повне коло вздовж залізниці більшого радіусу. Кути, під якими з центрів кіл видно точки A і B, складають 60^0 і 120^0. оцінити, яким може бути найбільший час безаварійного руху на цих залізницях.

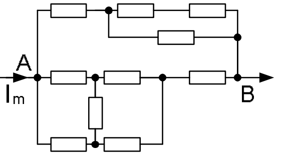
9 клас



1. Отвір у дні посудини щільно закритий конічним корком. Площа основи корка **S**, висота **L**. Рівень дна посудини перетинає конус на половині його висоти. Густина корка та рідини дорівнює відповідно ρ_0 і ρ . Якою повинна бути мінімальна висота рівня рідини $\mathbf{H_m} > 0$ над основою конуса, щоб корок не спливав? Яку зовнішню силу **F**, напрямлену вгору, треба прикласти до корка, щоб його витягти, якщо висота рівня рідини над основою конуса $H > H_m$? Примітка: об'єм конуса $V = SL/3$.

2. У фільмах про східні єдиноборства можна бачити, як герой вибігає на вертикальну стіну. Оцініть максимальну висоту, на яку, розігнавшись до швидкості $\upsilon_0 = 6$ м/с, може піднятись таким способом добре тренована людина. Коефіцієнт тертя між стінкою та взуттям $\mu = 0{,}6$. Відомо, що рекорди зі стрибків у висоту трохи перевищують 2 м.

3. Гора має форму конусу, схил якого утворює кут α з горизонтом. На вершину гори веде дорога, яка піднімається під постійним кутом β до площини горизонту і навивається навколо гори так, що будь-яка ділянка дороги в напрямку, перпендикулярному до лінії підйому, горизонтальна. Визначити час t_1, за який можна піднятися на гору автомобілем, що їде зі сталою швидкістю υ . Уявіть, що наприкінці дороги у автомобіля відмовили коробка передач і гальма. Визначити, за який час t_2 автомобіль скотиться з гори при вмілому управлінні водія. За якого коефіцієнта тертя μ між колісною гумою і покриттям дороги це можливо? Опором повітря знехтувати. Висота гори h.



4. 10 однакових плавких запобіжників з'єднані так, як показано на рисунку. Окремий запобіжник перегоряє при протіканні через нього струму силою понад $I_0 = 6$А. Визначити силу струму I_m, при перевищенні якої точки А та В виявляться ізольованими одна від одної.

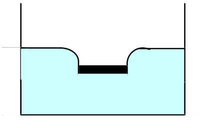
5. На дні посудини, вщент заповненої водою, горизонтально лежить тонке плоске дзеркало. Хлопець, нахилившись над посудиною, бачить зображення свого ока в дзеркалі на відстані d = 25 см. Відстань від ока до поверхні води h = 5 см. Показник заломлення води n = 4/3. Визначити глибину посудини. Всі кути, які промінь утворює з вертикаллю, малі.

10 клас

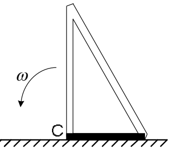
1. Заряджена частинка масою m рухається у вакуумі в площині XOY. Її положення фіксується через проміжки часу Δt = 80,0 мс. Вісь OY спрямована вертикально вгору. Однорідне електричне поле напруженістю E спрямоване під кутом β = - 45^0 до осі OX. Координати трьох послідовних положень дорівнюють: x_1 = 19,0 мм, y_1 = 127 мм; x_2 = 101 мм, y_2 = 185 мм; x_3 = 237 мм, y_3 = 149 мм. Знайти заряд q та значення мінімальної швидкості $\upsilon_{\min}$ частинки (поле тяжіння вертикальне).

2. У фільмах про східні єдиноборства можна бачити, як герой вибігає на вертикальну стіну. Оцініть максимальну висоту, на яку, розігнавшись до швидкості υ_0 = 6 м/с, може піднятись таким способом добре тренована людина. Коефіцієнт тертя між стінкою та взуттям μ = 0,6. Вважати, що така людина може подолати висоту 2 м на змаганнях зі стрибків угору з розбігу.

3. Круглу пластину діаметром d = 4 мм і товщиною a = 0,5 мм обережно поклали на поверхню води. Завдяки поверхневому натягу вона залишається на плаву, причому на місці дотику верхньої площини пластинки з поверхнею води кут між ними дорівнює 90^0(*див. рис.*). Визначити густину матеріалу пластинки. Поверхневий натяг води σ = 73 мН/м.



4. Замкнену трубку, яка має вигляд прямокутного трикутника з гострими кутами 30^0 і 60^0, утримують у вертикальній площині. Горизонтальна ділянка трубки заповнена водою, решту трубки займає повітря при атмосферному тиску. Трубку перевертають у вертикальній площині на 90^0 навколо точки C, як показано на рисунку. Під час повороту стовпчик рідини залишається нерухомим щодо трубки. Визначити залежність кутової швидкості ω, з якою повертають трубку, від кута повороту φ. Побудувати залежність тиску всередині стовпчика води від відстані до точки C і визначити, за яких умов і в якому місці стовпчика вода може почати кипіти.



5. На дні посудини, вщент заповненої водою, горизонтально лежить тонке плоске дзеркало. Хлопець, нахилившись над посудиною, бачить зображення свого ока в дзеркалі на відстані d = 25 см. Відстань від ока до поверхні води h = 5 см. Показник заломлення води n = 4/3. Визначити глибину посудини. Всі кути, які промінь утворює з вертикаллю, малі.

11 клас

1. При певному значенні кута α нахилу площини розглядаються два випадки руху трубки по цій площині. В першому випадку поздовжня вісь трубки утворює з горизонтом кут α, а в другому вона під час руху залишається горизонтальною. В обох випадках трубка спочатку була нерухома. Визначити ті значення кута α при яких в обох випадках вісь трубки має однаковий закон руху. При цьому визначити та порівняти кількість виділеного тепла при однакових вертикальних переміщеннях h. Коефіцієнт тертя ковзання μ заданий, тертям кочення знехтувати.

2. Велосипед їде зі сталою швидкістю υ. Перпендикулярна до площини колеса складова індукції магнітного поля Землі дорівнює B. Визначити залежність від часу ЕРС індукції, яка виникає в спиці. Вважати, що спиці розташовані радіально, а їхня довжина дорівнює радіусу колеса R. Нехтуючи опором ободу колеса, знайти розподіл струмів через спиці та розташування точок рівного потенціалу.

3. Електричне коло складене з джерела змінної ЕРС $E(t) = E_m \sin \omega t$, активного опору R та діода з вольт-амперною характеристикою $I(U) = \alpha U^2$, $U > 0$, $I(U) = 0$, $U \leq 0$. а) Знайти миттєве значення напруги на діоді. б) Вважаючи виконаною умову $\alpha R E_m << 1$, розрахувати постійну складову струму через опір R. в) Нехай тепер паралельно до опору R увімкнений конденсатор ємністю C. Вважаючи виконаними умови $R >> (\omega C)^{-1} >> (\alpha E_m)^{-1}$, знайти глибину пульсацій (відношення пульсаційної складової до постійної складової напруги) на ємності. Вказівка: зарядка конденсатора C через опір R від джерела напруги U_0 відбувається за законом $U(t) = U_0[1-\exp(-t/RC)]$, розрядка від початкової напруги через опір R – за законом
$U(t) = U_0 \exp(-t/RC)$.

4. Літак швидко набирає висоту над морем і в момент входу в зону прямого бачення берегової лінії пілот починає приймати радіо 106 FM від передавача, який знаходиться на березі на висоті h = 30 м над рівнем моря на відстані L = 60 км від літака. Протягом подальшого підйому інтенсивність радіосигналу періодично змінюється, хоч відстань L залишається незмінною. Вважаючи, що радіохвилі поширюються в однорідній атмосфері, визначити різницю висот між першим та другим найнижчими максимумами інтенсивності, зареєстрованими пілотом.

5.Щоб краще роздивитися сцену в театрі, короткозорий глядач попросив у далекозорого сусіда окуляри, якими той користувався для читання. Короткозорий чітко бачить без окулярів у межах від d_1 = 14 см до кількох десятків сантиметрів. Далекозорий без окулярів чітко бачить предмети не ближче d_2 = 2 м від очей. Яким чином короткозорий глядач, користуючись окулярами сусіда, може роздивитись сцену? Чи будуть деталі сцени здаватися йому чіткими? Вважати, що сцена знаходиться досить далеко.

Задачі запропонували:
8 клас – С.У.Гончаренко (1-3), О.Ю.Орлянський (4-5).
9 клас – С.У.Гончаренко (1,4,5), О.Ю.Орлянський (2,3).
10 клас – А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2,4), С.У.Гончаренко(3-5).
11 клас – А.П.Федоренко (1), О.Ю.Орлянський (2), І.О.Анісімов (3), В.П.Сохацький (4), С.У.Гончаренко (5).

Експериментальний тур

8 клас

Задача 1

Завдання
- Визначте коефіцієнт об’ємного розширення повітря.
- У звіті вкажіть у порядку важливості фактори, що негативно впливають на точність результату. Яким чином Ви намагалися підвищити цю точність? Опишіть послідовність виконання роботи. Наведіть результати вимірювань і обчислень.

Довідка. При зміні температури для заданої маси газу об’єм змінюється за законом $\mathbf{V = V_0(1+\alpha\, t)}$, де α **-** коефіцієнт об’ємного розширення, **t** – температура за шкалою Цельсія.

Обладнання
Спільне: посудина (червона) з водою при температурі близько 50 ^{0}С; посудина (зелена) з водою кімнатної температури.
Індивідуальне: циліндрична пробірка; лінійка; пляшка з відрізаним верхом; хімічна склянка; термометр.

Задача 2

Завдання

- Визначте густину невідомої рідини.
- Обґрунтуйте вибір методу проведення експерименту та опишіть хід його виконання.
- Вкажіть у порядку важливості фактори, які впливають на точність одержаних результатів.

Обладнання

Спільне: посудина (біла) з рідиною невідомої густини; посудина (зелена) з чистою водою; скотч; ножиці.

Індивідуальне: лінійка; трубка; пляшка з відрізаним верхом; хімічна склянка.

Увага! Рідину невідомої густини можна набрати лише один раз.

9 клас

Задача 1

Завдання

Визначити коефіцієнт тертя кожної з лінійок по поверхні паперу, що лежить на столі.

Обладнання

Лінійка дерев'яна; лінійка пластикова; аркуш паперу; шматок пластиліну; нитка.

Примітка. Нахиляти стіл не дозволяється!

Задача 2

Завдання

Визначте густину невідомої рідини.

Обладнання

*Спільне:*посудина (біла) з рідиною невідомої густини; посудина (зелена) з чистою водою; скотч; ножиці.

Індивідуальне: лінійка; трубка; пляшка з відрізаним верхом; стаканчик.

10 клас

Задача 1

Завдання

Визначте коефіцієнт відновлення швидкості при центральному співударі „ребро – ребро" двох п'ятикопійчаних монет.

Довідка. Коефіцієнт відновлення – відношення нормальних складових відносних швидкостей тіл після та до удару.

Обладнання

Спільне: ножиці; скотч.

Індивідуальне: дві монети по п’ять копійок; дві лінійки; аркуш міліметрового паперу.

Задача 2

Завдання

- Сконструюйте пристрій для вимірювання маси. Побудуйте градуювальну криву для користування цим пристроєм. Наведіть ескіз вимірювального пристрою. Вкажіть послідовність проведення процедури вимірювання. Визначте чутливість запропонованого Вами пристрою.
- Струмом якої сили Вам вдалось врівноважити тіло, яке було видане для перевірки працездатності приладу? Яка маса цього тіла?
- У звіті наведіть оцінку факторів, що впливають на чутливість запропонованого Вами методу зважування та дайте рекомендації по збільшенню точності та чутливості вимірювального приладу.

Обладнання

Групове: кусачки; наждачний папір.

Індивідуальне: відрізок мідного дроту діаметром 1,50 мм; відрізок дроту діаметром $0{,}4 \div 0{,}6$ мм у лаковій ізоляції з зачищеними кінцями (4 шт); дерев’яна лінійка; магніт; котушка мідного дроту (не розмотувати!); з’єднувальні провідники (2 шт); батарейка на 4,5 В; змінний резистор на 47 Ом; амперметр шкільний на 2 А; аркуш міліметрового паперу формату А4; пластилін (2 бруски); тіло для контрольного зважування (видається пізніше).

Довідникові дані: густина міді 8900 кг/м^3.

11 клас

Задача 1

Завдання

- Визначте коефіцієнт відновлення при прямому центральному ударі „ребро-ребро” двох монет.
- Оцініть точність отриманого Вами результату вимірювань.

Довідка. Коефіцієнт відновлення – відношення абсолютних значень відносних швидкостей тіл після та до удару.

Обладнання
Спільне: ножиці; скотч;
*Індивідуальне:*дві монети по п'ять копійок; дві лінійки; аркуш міліметрового паперу.

Задача 2

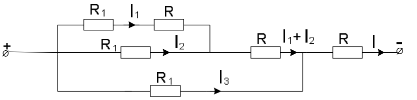
Завдання

- Запропонуйте метод експериментального визначення коефіцієнту в'язкості η повітря, виходячи з аналізу згасання коливань маятника, виготовленого з ниток та м'ячика для пінг-понгу. Бажано врахувати силу опору повітря, що діє не тільки на м'ячик, але й на нитку.
- Виготовте експериментальну установку та проведіть вимірювання.
- За результатами обробки одержаних Вами експериментальних даних проаналізуйте достовірність значення коефіцієнта в'язкості повітря (посилання на довідникові дані не припустимі!).
- Проаналізуйте можливість застосування запропонованого Вами методу для конкретних умов експерименту та вплив нитки на згасання коливань маятника. За яких умов проведення експерименту можна досягти найбільш точного результату?

Довідка. Наявність сил опору приводить до поступового зменшення енергії механічних коливань внаслідок її перетворення у внутрішню енергію. У найпростішому випадку сила опору прямо пропорційна швидкості руху тіла $F_{опX} = -b \cdot \upsilon_x$. Так, при ламінарному обтіканні кулі потоком рідини або газу (коли число Рейнольда $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho \upsilon r}{\eta} < 1$, де ρ – густина рідини або газу, η – коефіцієнт в'язкості, r – характерний розмір тіла, тобто радіус кулі), сила опору може бути обчислена за формулою Стокса $F_{оп} = 6\pi r \eta \upsilon$. Тоді при малих коливаннях горизонтальна координата тіла змінюється з плином часу за законом $x(t) = A_0 \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0)$. Параметр α, який називається коефіцієнтом згасання, пов'язаний з масою тіла та коефіцієнтом у формулі для сили опору: α = b/2m, а частота коливань у випадку слабкого згасання практично не відрізняється від частоти вільних коливань при відсутності сил опору($\omega \approx \omega_0$).

Обладнання
Спільне: ножиці; нитки швацькі; лінійка; важок масою 5 – 20 г.
Індивідуальне: м'ячик для пінг-понгу; лабораторний штатив з лапкою. рейка довжиною 1,25 м з двома забитими цвяхами.

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
8 клас



Задача 1. Позначивши опір амперметра R_1, нарисуємо еквівалентне коло.Запишемо закони послідовного і паралельного з'єднань для даного кола.

$I_1(R_1+R) = I_2 R_1 \Rightarrow R = R_1(I_2/I_1 - 1) = 3R_1$ (1)

$I_2 R_1 + (I_1+I_2) R = I_3 R_1 \Rightarrow I_3 = I_2 + (I_1 + I_2) R/R_1 = 19$ мА.

$U_0 = I_2 R_1 + (I_1 + I_2)R + IR$, враховуючи (1) і те, що $I = I_1 + I_2 + I_3$ отримаємо: $R = U_0/(I_2/3 + I_1 + I_2 + I_1 + I_2 + I_3) = 150$ Ом. Згідно умови задачі у відповідях більше двох значущих цифр давати не можна.

Задача 2. Для запису рівняння теплового балансу необхідно провести попередні розрахунки.

1. Яку кількість теплоти треба надати льоду, щоб нагріти його до 0 ^{0}C?

$Q_л = c_л m_л(0 - t_л) = 168$ кДж.

2. Яку кількість теплоти може віддати пара при повній конденсації?

$|Q_k| = m_п r = 230$ кДж.

3. $|Q_k| > Q_л \rightarrow$ лід нагріється до 0 ^{0}C і буде плавитись.

4. Яка кількість теплоти необхідна для повного плавлення льоду?

$Q_{пл} = m_л \lambda = 1360$ кДж.

5. $Q_{пл} + Q_л > |Q_k| \rightarrow$ вода, що виникла з пари буде охолоджуватися.

6. Яку кількість теплоти може виділити вода, що виникла з пари, при охолодженні до 0 ^{0}C? $|Q_{вп}| = c_в m_п(t_п - 0) = 42$ кДж.

7. Яку кількість теплоти може виділити вода при охолодженні до 0 ^{0}C?

$|Q_в| = c_в m_в(t_в - 0) = 840$ кДж.

8. $Q_л + Q_{пл} > |Q_k| + |Q_{вп}| + |Q_в| \rightarrow$ лід розплавиться частково, кінцева температура системи $\Theta = 0$ ^{0}C.

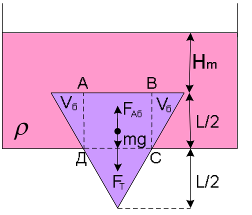
Запишемо рівняння теплового балансу $Q_л = \lambda \Delta m = |Q_k| + |Q_{вп}| + |Q_в| \rightarrow$

$\Delta m = (|Q_k| + |Q_{вп}| + |Q_в| - Q_л) / \lambda = 2{,}8$ кг.

Δm – маса льоду, що розплавилась.

$m_{лк} = m_л - \Delta m = 1{,}2$ кг, $m_{вк} = \Delta m + m_в + m_п = 6{,}9$ кг. $m_{пк} = 0$.

Задача 3. Якщо висота рівня води над основою конусу (H_m) мінімальна, на конус не діє сила реакції опори, а діє тільки вода і Земля. Силу з боку води розділимо на дві частини: F_T – сила тиску води на основу АВ циліндра АВСД,



$F_T = \rho g H_m \cdot S_{AB} = \rho g H_m S / 4$ (1) (радіус круга АВ у 2 рази менше радіуса основи конуса); $F_{Аб}$ - сила тиску води на бічну частину конусу, що залишилась без циліндра АВСД. Якщо забрати циліндр АВСД, дія води на бічну частину конусу не зміниться, оскільки з'явиться нова дія води на внутрішню бічну циліндричну стінку бічної частини конуса, яка дорівнює нулю. Без циліндра бічна частина конусу повністю знаходиться у воді, тобто дія води дорівнює силі Архімеда.

$F_{Аб} = \rho g V_б = \rho g (SL/3 - S_{AB} L/2 - S_{AB} L/6)$ (2)

Запишемо умову рівноваги конуса. $F_{Аб} = m_k g + F_T$ (3), де $m_k = \rho_0 SL/3$ (4)

Враховуючи (1) – (4), отримаємо: $H_m = 2L(\rho - 2\rho_0)/3\rho$, корок не спливатиме (при $H_m > 0$) тільки при $\rho > 2\rho_0$.

Для визначення мінімальної зовнішньої сили (F_m) потрібної для піднімання корка (при $H > H_m$) запишемо умову рівноваги корка (окрім зазначених сил з'являється тільки зовнішня сила, напрямлена вгору, сила реакції опори у момент піднімання знову відсутня).

$F_m + F_{Аб} = m_k g + F_T \Rightarrow F_m = m_k g + F_T - F_{Аб} = \rho_0 gSL/3 + \rho gHS/4 - \rho gSL/6 =$

$= gS(4\rho_0 L + 3\rho H - 2\rho L)$. Для витягування корка необхідно прикласти силу $F \geq F_m$ (при $\rho > 2\rho_0$, $H = H_m$).

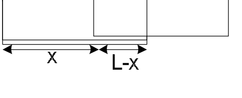
Задача 4. За умовою напруга подається до кінців реостата, це можливе тільки при підключенні до зовнішньої і внутрішньої трубки. Тільки в цьому випадку опір реостата однозначно визначається його довжиною, що має сенс (при підключенні до середньої і внутрішньої трубок опір реостата при заданій довжині визначається положенням зовнішньої трубки).

Визначимо опір трубок. $R = \rho L/S = \rho L/(2\pi Rd) = 1{,}6$ мОм, де L,R,d – відповідно довжина, радіус і товщина стінок трубки.

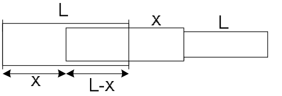
Опір будь-якої ділянки довжиною X дорівнює: $R_x = Rx/L$.

1) Розглянемо випадок коли довжина реостата $L_p \leq 2L$. Будемо витягувати внутрішню трубку, не рухаючи інші.

$L_p = L + x$, $x = L_p - L$ (1). На ділянці x – дві трубки паралельно, на ділянці (L – x) – три трубки паралельно,

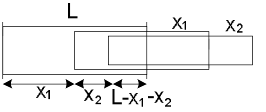


на ділянці (x) – одна. $R_x = Rx/2L + R(L – x)/3L + Rx/L = R(7x + 2L)/6L =$
$= R(7L_p – 5L)/6L$ – опір реостата при $L_p \leq 2L$ лінійно залежить від L_p. Опір реостата при довжині L_p не залежить від способу її отримання. $L_p = L + x_1 + x_2$. На ділянці $(x_1 + x_2)$ – одна трубка, на ділянці $(x_1 + x_2)$ – дві трубки паралельно, на ділянці $(L – x_1 – x_2)$ – три трубки паралельно.

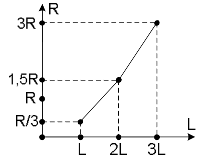


При $x = x_1 + x_2$ опори реостатів рівні.

2). Нехай $2L \leq L < 3L$. Внутрішня трубка максимально (на L) витягнута з середньої, яка на x витягнута з зовнішньої. $L_p = 2L + x$



На ділянці (2x + L) – одна трубка,
на ділянці (L – x) – дві трубки паралельно,
$R_x = R(2x + L)/L + R(L – x)/2L = 3R(x + L)/2L =$
$3R(L_p – L)/2L$.



Опір реостата при $2L \leq L < 3L$ лінійно залежить від L_p.
При $L = 2L$, $R_1 = 3R/2$, при $L_p = 3L$, $R_2 = 3R$.

Задача 5. Розв’язок журі.

З умови задачі трикутник, який утворений центрами кіл і точкою А має кути 30^0 і 60^0 і є прямокутним. Тоді відношення радіусів більшого і меншого кіл $R/r = \sqrt{3}$. Назвемо першим потяг, який відправляється з точки А, а другим той, що відправляється з В. Тоді час, через який голова першого потягу проходить точку А $t_{1A} = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} m$, де m – ціле число, яке означає кількість обертів першого потягу. Час, через який голова першого потягу проходить точку В $t_{1B} = \dfrac{2\pi r}{3\upsilon} + \dfrac{2\pi r}{\upsilon} m$.

Аналогічно для другого потягу $t_{2A} = \dfrac{5\pi r}{3\upsilon} + \dfrac{2\pi r}{\upsilon} n$, $t_{2A} = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} n$.

Аварія відбудеться в точці А або В, якщо час прибуття в цю точку потягів буде відрізнятися в ту чи іншу сторону на 5 с (час проходження потягу повз точку), тобто на $\dfrac{l}{\upsilon} = \dfrac{1}{12}\dfrac{2\pi R}{\upsilon}$. Отже $\left|t_{2A} - t_{1A}\right| < \dfrac{l}{\upsilon}$, $\left|t_{2B} - t_{1B}\right| < \dfrac{l}{\upsilon}$.

Підставимо одержані раніше вирази і скоротимо все на $\dfrac{2\pi R}{\upsilon} = 1$ хв.

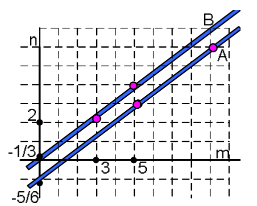
Аварія в А, якщо $\left|n - \dfrac{1}{\sqrt{3}} m + \dfrac{5}{6}\right| < \dfrac{1}{12}$ (1)

Аварія в В, якщо $\left| n - \frac{1}{\sqrt{3}} m + \frac{5}{6} \right| < \frac{1}{12}$ (2)

Знайти за яких найменших додатних значеннях n і m виконуються рівності (1) і (2) не дуже складно. Виявляється, аварія відбудеться в точці В, коли n = 2 і m = 3. Другий потяг після двох повних обертів досягне цієї точки на $\left(2 - \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) хв \approx 4{,}53$ с пізніше першого. Тобто аварія відбудеться рівно через 2 хвилини.

Більш наочним є графічний метод розв'язку. Якщо відкласти вздовж осі абсцис m, а вздовж ординат n, нерівності (1) буде відповідати смуга між прямими $n = \frac{1}{\sqrt{3}} m - \frac{5}{6} - \frac{1}{12}$ і $n = \frac{1}{\sqrt{3}} m - \frac{5}{6} + \frac{1}{12}$, а нерівності (2) – смуга між прямими $n = \frac{1}{\sqrt{3}} m + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{12}$ і $n = \frac{1}{\sqrt{3}} m + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{12}$ (див. рис). Всі прямі мають однаковий кут нахилу 30^0 і досить точно можуть бути побудовані на аркуші паперу з відповідним масштабом. Ширина смуги у вертикальному напрямку 1/6. Як бачимо з графіку, перша точка з цілими значеннями n і m має координати (3;2).

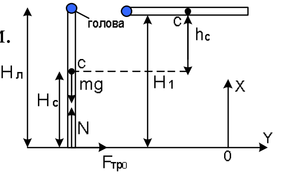
Для того, щоб відповісти на питання про найбільший час безаварійного руху, слід „порухати" смуги у вертикальному напрямку, добиваючись того, щоб на якомога більшій дільниці смуги не було вузлів масштабної сітки. Зрозуміло, що початкове положення потягів не є довільним, якщо ми шукаємо найбільший час безаварійного руху. Дійсно, якщо б у початкових положеннях потяги не дотикались один одного, можна було б відтягти їх на рівні відстані назад до дотику і, визначивши таким чином нові стартові умови, збільшити час руху. Отже початок руху відповідає аварійній ситуації, кінець – також. Смуга проходить через початок координат. Найбільша відстань між двума вузлами, які попадають в смугу, – це 7 одиниць по горизонталі і 4 по вертикалі. Для другої смуги найбільша відстань між вузлами така ж. Тобто у найсприятливішому випадку аварія відбудеться в іншій точці через сім неповних обертів вздовж малого кола і чотири неповні оберти вздовж великого.



9 клас

Задача 1. *Див. 8 клас, задача№3.*

Задача 2. Нехай висота людини $H_л = 170 \div 180$ см, а його центр мас (С) знаходиться на висоті $H_c = 0,9$ м. У фільмах про східні єдиноборства ми бачили, що для спортсменів нанести удар на висоті $H_1 = 2,15$ м, знаходячись у горизонтальному стані, не становить труднощів. Розглянемо поштовх спортсмена (див.рис), записавши другий закон Ньютона в проекції на вісь OX. $(N - mg)\Delta t = \upsilon_1 m$ (1), де N – середня сила реакції опори, Δt – час поштовху, υ_1 – вертикальна складова швидкості спортсмена після поштовху, m – маса спортсмена. Оскільки після поштовху центр мас спортсмена піднімається на висоту $h_c = H_1 - H_c = \upsilon_1^2/2g$, визначимо вертикальну швидкість спортсмена $\upsilon_1 = \sqrt{2g(H_1 - H_c)} = 5$ м/с. Вважаючи, що при поштовху спортсмен переміщає свій центр мас приблизно на $\Delta h_c = (0,1 \div 0,15)$м, оцінимо вертикальне прискорення спортсмена.

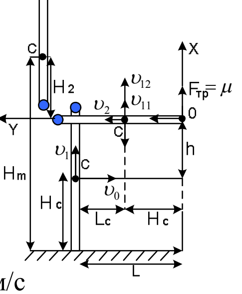


$N - mg = ma = m\upsilon_1^2/(2\Delta h_c) \Rightarrow a = 100$ м/с$^2 = 10g$ (Зрозуміло, що це витримає тільки добре тренований спортсмен). Оскільки **a** суттєво більше за **g** , силою тяжіння в рівнянні (1) при оцінках можна нехтувати.

Нехай при вбігання на стінку спортсмен відштовхується від підлоги на відстані L = 1,5 м від стінки. Тоді, до взаємодії із стінкою його центр мас проходит відстань $L_c = L - H_c = 0,6$ м (вважаємо, що при взаємодії із стінкою спортсмен розташований практично горизонтально). Час польоту до стінки $t_1 = L_c/\upsilon_0 = 0,1$ с. За мить до взаємодії із стінкою вертикальна швидкість спортсмена $\upsilon_{11} = \upsilon_1 - gt_1 = 4$ м/с. Нехай, після взаємодії із стінкою, спортсмен рухається назад з горизонтальною швидкістю $\upsilon_2 = 3$ м/с $= \upsilon/2$ (це достатньо реально), вверх із швидкістю υ_{12}. Для часу взаємодії із стінкою (Δt) запишемо другий закон Ньютона.

OX: $(\mu N - mg)\ \Delta t \approx \mu N \Delta t = m(\upsilon_{12} - \upsilon_{11})$ (2)

OY: $N \Delta t = (\upsilon_0 + \upsilon_2)$ (3)



З рівнянь (2) і (3) отримаємо $\upsilon_{12} = \mu\ (\upsilon_0 + \upsilon_2) + \upsilon_{11} = 9,4$ м/с

Після взаємодії із стінкою центр мас підніметься, ще на $H_2 = \upsilon_{12}^2/2g = 4,4$ м.

Точка взаємодії спортсмена із стінкою **O** знаходиться на висоті:

$H_0 = H_c + h = H_c + \upsilon_1 t_c - g t_c^2/2 = 1,2$ м. Максимальна висота підйому спортсмена $H_м = H_0 + H_2 = 5,6$ м.

Задача 3. Розв'язок журі. Коли автомобіль піднімається вгору із сталою швидкістю υ, проекція швидкості автомобіля на вертикальний напрямок також має стале значення $\upsilon \sin\beta$. Отже висоту h у вертикальному напрямку автомобіль подолає за час $t_1 = \dfrac{h}{\upsilon \sin\beta}$ (1)

Розглянемо спуск автомобіля. Його швидкість буде збільшуватись зі сталим прискоренням $g\sin\beta$. Проекція цього прискорення на вертикальний напрямок $g\sin^2\beta$. Враховуючи, що початкова швидкість дорівнює нулю, з виразу для вертикальної координати $z = \dfrac{g\sin^2\beta t^2}{2}$

знаходимо час спуску (z = h): $t_2 = \dfrac{1}{\sin\beta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. (2)

Швидкість u, яку буде мати автомобіль біля підніжжя гори, знаходимо як добуток його прискорення $g\sin\beta$ на час руху t_2

$$u = g\sin\beta \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

або із закону збереження енергії $mu^2/2 = mgh$. Для того, щоб автомобіль втримався на дорозі, необхідно, щоб сила тертя забезпечила доцентрове прискорення a_n, тобто $ma_n = F_{тр} \le \mu N = \mu\, mg\cos\beta$, звідки одержимо обмеження на коефіцієнт тертя $\mu \ge \dfrac{a_n}{g\cos\beta}$. (3)

Доцентрове (нормальне) прискорення можна розрахувати за різними формулами $a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R = \upsilon\,\omega$, але чому дорівнює радіус R кривизни траєкторії, або кутова швидкість? Оскільки траєкторія „розкручується", радіус кривизни більший за відстань від точки траєкторії до осі конуса. Розглянемо систему координат, яка починається у геометричній вершині конусу з віссю OZ напрямленою вздовж його осі вниз. Тоді координата z і відстань r від осі OZ до точки траєкторії пов'язані співвідношенням $r = z\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, яке власне і є рівнянням конічної поверхні. Таке ж співвідношення буде між вертикальною складовою швидкості $u_z = u\sin\beta$ і радіальною складовою u_r, з якою автомобіль віддаляється від осі конуса: $u_r = u_z\mathrm{ctg}\,\alpha$. Проекція швидкості автомобіля на горизонтальну площину $u\cos\beta$ має не тільки радіальну складову швидкості $u_r = u\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, але й тангенціальну складову $u_t = \omega r$, які взаємно перпендикулярні. Отже

$(u\sin\beta\ \mathrm{ctg}\,\alpha)^2 + (\omega r)^2 = (u\cos\beta)^2$, звідки знаходимо:

$$\omega = \frac{u\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{r\sin\alpha} = \frac{u\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{z\cos\alpha}.$$

Ми визначили кутову швидкість руху автомобіля відносно осі конуса. За умовою задачі з такою ж кутовою швидкістю змінюється напрям руху автомобіля. Нормальне прискорення визначимо із формули $a_n = \upsilon\,\omega$, $\upsilon = u\cos\beta$ – проекція швидкості автомобіля на горизонтальну площину.

Отже $\mu \ge \dfrac{\omega u}{g} = \dfrac{u^2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{gz\cos\alpha}$. Із закону збереження енергії $mu^2/2 = mg(z - z_0)$ визначимо швидкість і підставимо у вираз для коефіцієнту тертя:

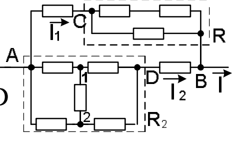
$$\mu \ge \frac{\omega u}{g} = \frac{2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\cos\alpha}\left(1 - \frac{z_0}{z}\right).$$

Якщо знехтувати розмірами майданчику, отримаємо обмеження на μ, яке не залежить від того, наскільки спустився автомобіль, і є однаковим для будь-якої висоти: $\mu \ge \dfrac{2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\cos\alpha}$.

Це виявилося можливим за рахунок того, що радіус траси зі збільшенням швидкості руху автомобіля збільшується саме настільки, щоб точно компенсувати всі виникаючі бокові перевантаження.

Нарешті зазначимо, що відповідь для часу підйому автомобіля зі сталою швидкістю (1) також повинна бути доповнена обмеженням або на коефіцієнт тертя, або на величину сталої швидкості υ, оскільки сили тертя можуть не впоратись із забезпеченням підйому ($F_{\|} = mg\sin\beta$) і доцентрового прискорення ($F_п = ma_n$) перед самим майданчиком, особливо якщо той має невеликий радіус. Нагадаємо, що сила тертя не може перевищити добуток коефіцієнта тертя на силу реакції опори $F = \sqrt{F_{\|}^2 + F_n^2} \le \mu N = \mu mg\cos\beta$.

Задача 4. Розв'язок журі. Основним елементом плавкого запобіжника є тонка металева дротинка. Якщо сила струму, що проходить по ній, перевищує задане значення, то дротинка плавиться за рахунок теплоти, яка виділяється в ній, і в колі утворюється розрив.



Нехай опір окремого запобіжника дорівнює R. Тоді опір R_1 ділянки кола між точками C і B (*див. рис.*) дорівнює (2/3)R. Опір R_2 ділянки кола між точками A і D

легко визначити, якщо врахувати, що різниця потенціалів між точками 1 та 2 дорівнює нулю (збалансований місток Уітстона), а тому без зміни розподілу струмів у колі ці точки можна з’єднати між собою провідником, або розімкнути. Отже, опір ділянки кола між точками A і D дорівнює $R_2 = R$.
Нехай, як це показано на рисунку, сила струму через запобіжник, який з’єднує точки A і C, дорівнює I_1, а через запобіжник увімкнутий між точками D і B, дорівнює $I_1(R + R_1) = I_2(R + R_2)$.
З цих виразів випливає, що $I_2 = (5/6)I_1$. Отже, при $I_m = (11/6)I_0$ повинен перегоріти запобіжник, який з’єднує точки A і C, внаслідок чого одразу перегорить запобіжник DB і точки A і B виявляться ізольованими одна від одної. Таким чином, $I_m > (11/6)I_0 = 11$ A.

Задача 5. Розв’язок журі. При розв’язанні задач з геометричної оптики важливо правильно побудувати хід променів (*див. рис1.*). Для побудови зображення використаємо два промені. Перший промінь беремо вертикальним. Другий іде під невеликим кутом α до першого. На межі розділу повітря – вода другий промінь

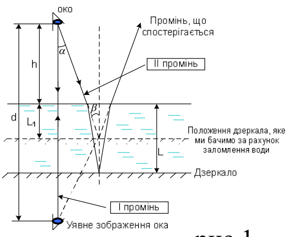


рис.1.

зазнає заломлення та після відбиття від поверхні дзеркала виходить з води під кутом α, що визначається законом заломлення: $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

Оскільки кути малі, то $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$ (рад).
Тоді з *рис.2.*, розглядаючи тангенси кутів трикутників з однаковою основою, маємо:
$$\frac{L}{L_1} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

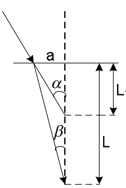


рис.2.

Відстань до уявного зображення, як відомо, вдвічі більша ніж до зеркала, тому з рис.1. маємо: $d = 2\cdot(h + L_1)$

Тоді: $$d = 2\cdot(h + \frac{L}{n})$$

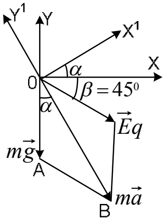
Звідки отримуємо остаточну відповідь: $L = n\cdot(\frac{d}{2} - h)$

Проводимо розрахунки: $L = \frac{4}{3}\cdot(\frac{25}{2} - 5)$ = 10 см.

10 клас

Задача 1. Розв'язок журі. Розглянемо частинку в будь-якому положенні. На неї діють дві сталі за величиною і напрямком сили, рівнодійна яких $\vec{R} = m\vec{g} + \vec{E}q = m\vec{a}$ (*рис.1.*).

Отже є напрямок в якому діє стала за величиною та напрямком результуюча сила. Перпендикулярно цьому напрямку частинка рухається із сталою швидкістю. З трикутника ОАВ

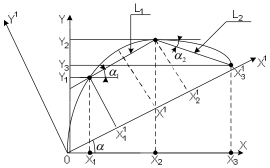


за теоремою синусів: $\dfrac{mg}{\sin\gamma} = \dfrac{Eq}{\sin\alpha}$ (1) рис.1.

Величину кута α можна визначити по напрямку осі X^1, вздовж якої $X_2^1 - X_1^1 = X_3^1 - X_2^1$ (2). Для наочності пояснень зробимо *рис.2.*

Умова (2) набуде вигляду:

$L_1\cos(\alpha_1 - \alpha) = L_2\cos(\alpha_2 - \alpha)$.



Звідки знаходимо: рис.2.

$$tg\alpha = \frac{L_1\cos\alpha_1 - L_2\cos\alpha_2}{L_2\sin\alpha_2 - L_1\sin\alpha_1} = \frac{(x_2 - x_1) - (x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)} = -\frac{2x_2 - (x_1 + x_3)}{2y_2 - (y_1 + y_3)}. \quad (3)$$

Після підстановки значень координат в (3) знайдемо, що $\alpha = arctg\dfrac{54}{94} \approx 30^0$

Отже згідно (1) заряд частинки дорівнює:

$$q = \frac{mg}{E}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{mg}{E}\frac{\sin 30^0}{\sin 15^0} = 1{,}93\frac{mg}{E}$$

Мінімальна швидкість – це швидкість руху частинки вздовж осі X

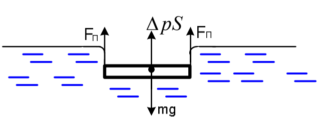
$$\upsilon_{\min} = \frac{X_2 - X_1}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)\cos(\alpha_1 - \alpha)}{\Delta t \cdot \cos\alpha_1}$$

Цю швидкість частинка має в положенні, в якому У = $У_{max}$. Оскільки

$\alpha_1 = \arccos\dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} 35{,}25^0$, тому $\upsilon_{\min}$ = 1,25 м/с

Задача 2. *Див. 9 клас, задача №2.*

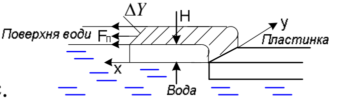
Задача 3. Запишемо умову рівноваги пластинки в проекціях на вертикальний напрям



$m \cdot g - \Delta p \cdot S - F_n = 0$, де $m \cdot g$ – сила тяжіння, Δp – різниця тисків на пластину знизу і зверху, Fп – сила поверхневого натягу. Розглянемо кожну силу окремо. Сила тяжіння зв'язана з шуканою густиною ρ матеріалу пластини співвідношенням $m \cdot g = \rho \cdot (\frac{\pi \cdot d^2}{4}) \cdot a \cdot g$, сила поверхневого натягу, яка діє на пластинку з боку води, дорівнює:

$$F_n = \sigma \cdot \pi \cdot d$$

Різниця сил тиску на пластинку обумовлена зниженням рівня води під пластиною і дорівнює $\Delta p \cdot S = \rho_в \cdot g \cdot (H + a) \cdot (\frac{\pi \cdot d^2}{4})$,



де $\rho_в$ – густина води, H – глибина занурення верхнього краю пластини. Цю величину визначимо з умови рівноваги виділеного на рис. об'єму води шириною $\Delta y(\Delta y << d)$, записавши його в проекції на горизонтальну вісь X. На виділений об'єм по горизонталі діє сила поверхневого натягу $F_п = \sigma \Delta y$ і сила тиску води на поверхню H Δy. Дія атмосферного тиску на цей об'єм скомпенсовується.

$\sigma \Delta y = p \cdot \Delta S = \rho_в \cdot g \cdot (H/2) \cdot H \cdot \Delta y$, звідки $H = \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho_в \cdot g}}$.

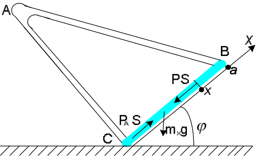
Отже, перепишемо умову рівноваги пластинки у вигляді

$$\rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot a \cdot g - \rho_в \cdot g \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho_в \cdot g}} + a) \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \sigma \cdot \pi \cdot d = 0$$

і знайдемо густину пластинки:

$$\rho = \rho_в + (1/a) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma \cdot \rho_в}{g}} + \frac{4 \cdot \sigma}{a \cdot d \cdot g} \approx 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

Задача 4. Розв'язок журі. На стовпчик води довжиною *x***,** діють сила тяжіння, сили опори з боку стінок і сили тиску (див.рис.). Проекції цих сил на напрям *BC* викликають доцентрове прискорення центру мас $\omega^2 x/2$. За другим законом Ньютона:



$$m_x \omega^2 x/2 = m_x g \sin\varphi + PS - P_A S, \qquad (1)$$

де P – тиск всередині стовпчика на відстані *x* від точки *C*. Для всього стовпчика $x = a$, $P = P_A$, і з рівняння (1) знаходимо залежність кутової швидкості ω від кута φ.

$$\omega = \sqrt{2g \sin\varphi / a}. \qquad (2)$$

Залежність тиску від відстані *x* отримаємо з рівняння (1), підставивши масу стовпчика $m_x = mx/a$ і кутову швидкість ω з рівняння (2)

$$P = P_A + \rho g \sin\varphi \frac{x^2 - ax}{a}. \quad (3)$$

Це рівняння параболи. Найнижчий тиск буде при x = a/2, тобто всередині стовпчика: $P_{\min} = P_A - (1/4)\rho g a \sin\varphi$.

Найменше значення тиску спостерігається наприкінці руху, коли $\varphi = \pi/2$.

Закипить при цьому вода чи ні залежить від того досягне цей тиск значення тиску насиченої пари при температурі води у трубці. Оскільки розміри трубки і температура води в ній не задані, дати однозначну відповідь на питання не можна. Однак можна стверджувати, що вода обов'язково закипить за умови $P_A - 1/4\rho g a \le 0$, тобто якщо сторона трубки $a \ge 4P_A/(\rho g) \approx 40$ м – навряд чи реальне обмеження. Зазначимо також, що у момент зупинки трубки з водою можливі значні перепади тиску у діаметральному до ділянки ВС напрямку, а також відрив краплі у точці В (при повному заповненні ділянки ВС водою).

Задача 5. *Див. 9 клас, задача №5.*

11 клас

Задача 1. Розв'язок журі. В першому випадку (*рис.1.*) сила тертя $F_1 \le \mu mg\cos\alpha$. При $tg\alpha \le tg\alpha_0 = \mu$ сила тертя $F_1 = mg\sin\alpha$, при $tg\alpha > tg\alpha_0 = \mu$ сила тертя $F_1 = \mu mg\cos\alpha$. У другому випадку (*рис.2.*) сила тертя $F_2 \le \mu mg\cos\alpha$**.** Трубка буде котитись без проковзування

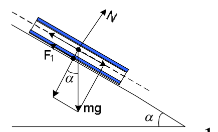
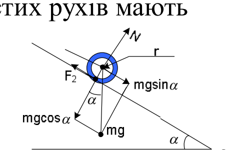


рис.1.

при $0 < \alpha \le \alpha_1$**.** Знайдемо цей граничний кут α_1. Кочення трубки розгляд-даємо. Знайдемо цей граничний кут α_1. Кочення трубки розглядаємо як складний рух, що складається з поступального руху осі **С** циліндра та обертового руху навколо осі **С**. Два рівняння цих простих рухів мають вигляд.

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_2 = ma_c \\ F_2 r = I_c a_c / r. \end{cases} \quad (1)$$



Позначимо $I_c/r^2 = km$. Тоді із системи (1) одержимо $a_c = g(\sin\alpha/(1+k))$, (2) $F_2 = mg\sin\alpha(k/(1+k))$, (3).

рис.2.

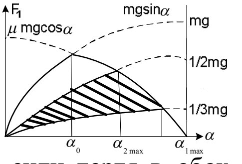
При $\alpha = \alpha_1$ $\quad mg\sin\alpha_1(k/(1+k)) = \mu mg\cos\alpha_1$, звідки одержимо

$tg\alpha_1 = ((1+k)/k)\,\mu$. (4)

Для трубки значення моменту інерції поперечного перерізу лежить в межах $mr^2/2 \le I_c \le mr^2$. Отже $1/2 \le k \le 1$.

$\text{tg}\,\alpha_{1\max} = 3\mu$ при к = 1/2 або $\alpha_{1\max} = arctg 3\mu$,

$\text{tg}\,\alpha_{2\max} = 2\mu$ при к = 1 або $\alpha_{1\max} = arctg 2\mu$.



При $\alpha \ge \alpha_1$ сила тертя досягає максимального значення і дорівнює $F_2 = \mu mg\cos\alpha$

Отже, на інтервалі $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$, де $\alpha_{2\max} \le \alpha_1 \le \alpha_{1\max}$ сили тертя в обох випадках однакові ($F_1 = F_2$). Це означає, що на цьому інтервалі центр мас трубки має однаковий закон руху в обох випадках (однакова маса з положення рівноваги рухається під дією однакових сил).

При переміщенні по вертикалі на величину h потенціальна енергія трубки змінюється на величину $\Delta\Pi$ = mgh і йде на зміну кінетичної енергії та на виділення тепла. Тому в першому та другому випадку відповідно мають місце рівняння: $\begin{cases}\Delta\Pi = \Delta T_1 + Q_1, \\ \Delta\Pi = \Delta T_1 + \Delta T_2 + Q_2\end{cases}$ (5)

Де $\Delta T_1 = m\upsilon_c^2/2$, $\Delta T_2 = I_c\omega^2/2$.

Із системи (5) одержимо $Q_1 - Q_2 = I_c\omega^2/2$. (6)

Отже, при коченні з ковзанням тепла виділяється менше рівно на стільки, скільки кінетичної енергії акумулюється в обертальному русі. При цьому поступальний рух поздовжньої осі трубки однаковий в обох випадках.

Знайдемо ω^2 для заданих значень h та α. З рівняння (1) знаходимо, що $a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

$S = h/\sin\alpha = a_c t^2/2$, тому $t^2 = 2h/g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha$.

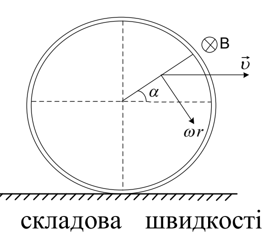
$\varepsilon = M_c/I_c = r\cdot\mu mg\cos\alpha/I_c = \mu g\cos\alpha/rk$.

$\omega^2 = (\varepsilon t)^2 = (\mu^2 g 2h/r^2k^2)(\cos^2\alpha/(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha)$.

Отже, згідно (6) отримуємо остаточну відповідь:

$Q_1 - Q_2 = \mu^2 mgh/ktg\alpha(tg\alpha - \mu)$, $\alpha > arctg(((1+k)/k)\mu)$.

Задача 2. Розв'язок журі.



ЕРС – це робота сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду. У нашому випадку сторонньою силою є напрямлена вздовж спиці складова сили Лоренца $F_\parallel$. Тобто $E = \dfrac{A_{cm}}{\Delta q} = \dfrac{1}{\Delta q_0}\int_0^R F_\parallel dr = \int_0^R B\upsilon_n dr$,

де $\upsilon_n = \omega r + \upsilon\sin\alpha$, перпендикулярна до спиці складова швидкості $\omega = \upsilon/R$ – кутова швидкість руху (*див.рис.*). Отже:

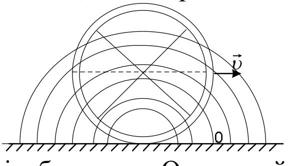
$$E=\int_0^R B(\omega r+\upsilon\sin\alpha)dr = B(\omega(r^2/2)+\upsilon\sin\alpha\cdot r)\Big|_0^R = B\upsilon R(1/2+\sin\alpha)\,. \quad (1)$$

Якщо колесо котиться рівномірно, $\alpha=\alpha_0-\omega t$, де α_0– кут, який утворювала спиця з напрямком руху колеса в момент початку відліку часу.

$E(t) = B\upsilon R(1/2 + \sin(\alpha_0-\omega t))$ (1^*)

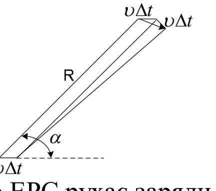
Зазначимо, що цей вираз можна було отримати інакше: розглянувши зміну магнітного потоку через уявний контур, площа якого змінюється за рахунок руху спиці (*див. примітку **A***).

З виразу (1) для E(t) видно, що за час руху ЕРС індукції періодично змінює свій напрям, але за один оберт середнє значення ЕРС індукції дорівнює $1/2\ B\upsilon R$. Здається, що з центру колеса струми повинні розходитись вгору через верхні спиці, а потім через обод колеса з нульовим опором стікати вниз і повертатись до центру вже через ті спиці, які знаходяться у цей момент часу знизу. При невеликих опорах спиць ці струми можуть бути досить значними. Насправді ніякі струми через спиці не течуть, оскільки дільниці ободу також рухаються, і в них також наводиться ЕРС. Дійсно, дві спиці з відповідною дільницею ободу утворюють замкнутий контур, магнітний потік через який не змінюється, оскільки не змінюється ні площа контуру, ні кут з вектором магнітної індукції, ні її значення. Це можна довести більш детально, якщо розглянути ЕРС індукції в дільницях ободу, а потім скористатись методом вузлових потенціалів, або правилами Кірхгофа (*див. примітку **B***).



Оскільки струми відсутні, різниця потенціалів між двома точками спиці буде дорівнювати ЕРС, яка між цими точками наводиться. Картина еквіпотенціальних поверхонь стає зрозумілою, якщо розглянути рух колеса з точки зору миттєвої осі обертання. Однаковий потенціал мають точки колеса, які рівновіддалені від точки дотику колеса і поверхні землі, яка має відносно Землі нульову швидкість (*див. рис.*). Це можна довести математично строго (*див. примітку **C***).

<u>Примітка А.</u>



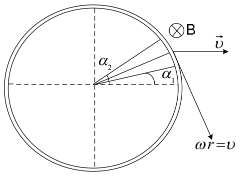
З рисунку видно, що враховуючи нескінченно мале значення $\upsilon\Delta t$, площу, яку „замітає” спиця, можна уявити як суму площі паралелограма і площі трикутника, тобто $\Delta S=\upsilon\Delta tR\sin\alpha+(1/2)\upsilon\Delta tR$ і далі

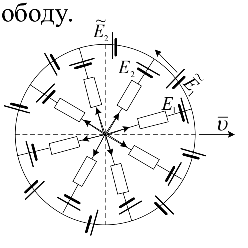
$E=-\Delta\Phi/\Delta t=-B\upsilon R(1/2+\sin\alpha)$, де знак „–” означає, що ЕРС рухає заряди вздовж зображеної спиці від центру колеса до його ободу, якщо лінії індукції входять в площину рисунка, і у зворотному напрямі, якщо виходять.

<u>Примітка В.</u> Припустимо, що дільницю ободу видно з центру колеса під кутами від α_1 до α_2 (*див. рис.*). Тоді

$$\widetilde{E} = \int B\upsilon_n dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} B\upsilon \cos\beta R d\beta = B\upsilon R(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

Еквівалентна схема для восьми спиць має вигляд зображений на рисунку. Оберемо напрямки струмів із центру колеса до ободу.





Тоді

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + ... = 0$. Для замкненого кола в яке входять $E_1, E_2, \widetilde{E}_1$ маємо $E_1 + \widetilde{E}_1 - E_2 = I_1 R - I_2 R$, або

$B\upsilon R(1/2 + \sin\alpha_1) + B\upsilon R(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - B\upsilon R(1/2 + \sin\alpha_2) = (I_1 - I_2)R$.

Тобто після скорочення знаходимо, що $I_1 = I_2$ незалежно від номера спиці. Це означає, що всі струми однакові. Оскільки їх сума дорівнює нулю, струми через спиці не йдуть.

<u>Примітка С.</u> Оскільки струми відсутні, різниця потенціалів між двома точками спиці буде дорівнювати ЕРС, яка між цими точками наводиться. Обравши потенціал центру колеса за нуль, згідно формули (1) знаходимо потенціал спиці на відстані r від її центру

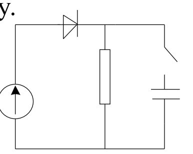
$$\varphi = \int_0^r B(\omega r + \upsilon \sin\alpha) dr = B(\omega(\frac{r^2}{2}) + \upsilon \sin\alpha \cdot r) = B\upsilon R(\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R}\sin\alpha).$$

Зазначимо, що декартові координати цієї точки спиці відносно системи координат пов'язаної з центром колеса ($r\cos\alpha$; $r\sin\alpha$). Тоді:

$$\varphi = B\upsilon R\left(\frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{R^2} + \frac{y}{R}\right),$$

звідки знаходимо, що еквіпотенціальні поверхні мають циліндричну форму і в площині колеса задаються рівнянням кіл з центром у точці дотику колеса і поверхні землі: $x^2 + (y + R)^2 = R^2 + (2R / \upsilon B)\varphi$.

Задача 3. Розв'язок журі.



Випадки (а-б) відповідають розімкненому ключу на рисунку.
а) За другим законом Кірхгофа $E(t) = U_d(t) + i(t)R$, (1)
де U_d – падіння напруги на діоді. Коли прикладена напруга від'ємна, струм через діод не протікає, і вся прикладена напруга падає на діоді. Коли прикладена напруга додатня, то $i(t) = \alpha U_d^2(t)$. (2)

В останньому випадку після підстановки (2) до (1) можна отримати квадратне рівняння. Його позитивний корінь має вигляд:

$$U_d = \frac{\sqrt{1+4\alpha RE}-1}{2\alpha R}. \qquad (3)$$

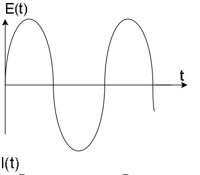
Отже, $$U_d(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+4\alpha RE}-1}{2\alpha R}. \ E(t) > 0; \\ E(t). \qquad E(t) < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

б) за умови $\alpha RE_m \ll 1$ (опір R значно менший за ефективний опір діода $1/\alpha E_m$) формула (4) спрощується і набуває вигляду $U_d(t) = E(t)$. Тоді струм через діод можна подати у формі

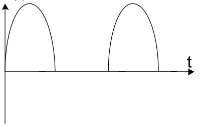
$$i(t) = \begin{cases} \alpha E^2(t) = \alpha E_m^2 \sin^2 \omega t, & E(t) > 0; \\ 0. & E(t) < 0. \end{cases}$$

Розкладаючи квадрат синуса за формулою $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ і враховуючи, що протягом половини періоду струм не протікає взагалі, отримаємо:

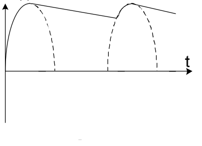
$\bar{i} = 1/4\alpha E_m^2$. (6)



в) цей випадок відповідає замкненому ключу на рисунку. Тепер ефективний опір діода вважається значно меншим за опір R. Тому при додатній полярності прикладеної напруги падінням напруги на діоді можна знехтувати. В результаті струм через діод за відсутності конденсатора мав би вигляд (*див.рис.*). $$i(t) = \begin{cases} E(t)/R, \ E(t) > 0; \\ 0, \qquad E(t) < 0. \end{cases} \qquad (7)$$



Насправді частина струму через діод іде на зарядку конденсатора. Умова $(\omega C)^{-1} \gg (\alpha E_m)^{-1}$ означає, що час зарядки конденсатора через діод значно менший від періоду. Завдяки цьому напруга на конденсаторі буде відслідковувати напругу на опорі R, доки діод залишати-



меться відкритим. Як тільки вхідна напруга пройде через максимум і почне падати, діод закриється, оскільки напруга на конденсаторі буде вищою від вхідної (конденсатор розряжається через великий опір R, тому напруга на ньому змінюється повільніше від вхідної). Підзарядка конденсатора знову почнеться тільки через час, що приблизно дорівнює періоду коливань (*див.рис*.). Таким чином, постійна складова напруги на конденсаторі буде близькою до E_m, а амплітуда пульсацій може бути оцінена як

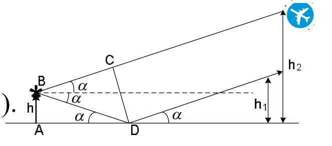
$$\Delta U = E_m - U\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = E_m\left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega RC}\right)\right] \approx \frac{2\pi E_m}{\omega RC}. \qquad (8)$$

Тоді глибина пульсацій буде $\dfrac{\Delta U}{E_m} \approx \dfrac{2\pi}{\omega RC}$.

Задача 4. Розв'язок журі.

1) Промінь, відбитий від поверхні, змінює свою фазу на π .

2) Різницю фаз між променями (різницю ходу) можна визначити з геометричної побудови



BD = h/sinα ; BC = BDcos2α = hcos2α /sinα

Різниця ходу: δ = BD – BC = (h/sinα)(1 – cos2α).

3) З умови утворення максимуму між прямим та відбитим променями:

(h/sinα)(1 – cos2α)= ($\lambda / 2$)(2n +1) визначаються кути (синуси кутів), під яким видно літак з берега. Використавши cos2α = 1 – $\sin^2\alpha$, отримаємо: 2hsinα =($\lambda / 2$)(2n+1), або sinα = λ (2n+1)/4h звідки $\sin\alpha_1 \approx 0{,}025$ (для n=0) та $\sin\alpha_2 \approx 0{,}075$ (для n=1)

Різниця висот: $\Delta h = h_2 - h_1 = L\sin\alpha_2 - L\sin\alpha_1 \approx 3$ км.

Задача 5. Розв'язок журі. 1) Фокусну відстань збиральної лінзи окулярів можна знайти з рівняння $1/d_0 + 1/(-d_2) = 1/F$,

Де d_0 = 25 см – відстань, на якій далекозорий в окулярах тримав газету, одержуючи уявне зображення в лінзі на відстані d_2. Тоді

$$F = \frac{d_2 \cdot d_0}{d_2 - d_0} = \frac{200 \cdot 25}{200 - 25} \approx 29 \text{ (см)} \quad (D = +\,3{,}5 \text{ дптр})$$

Для одержання максимального збільшення короткозорому потрібно тримати окуляри на витягнутій руці на відстані: $F + d_1 \approx 29 + 14 = 43$ (см) від ока і роздивлятись дійсне обернене зображення , яке буде для нього різким, оскільки воно потрапляє в межі його чіткого бачення. Зображення видно чітко, але воно виявляється оберненим.

Науково-популярне видання

“ЛЕВЕНЯ – 2006” ВІТАЄ ПЕРЕМОЖЦІВ

Інформаційний вісник

Уклали: ***А л е к с е й ч у к*** *Володимир Іванович*
К у з и к *Раїса Григорівна*

Технічний редактор *Леся Пелехата*
Коректор *Євдокія Русин*

Здано на складання 20.06.2006 Підписано до друку 21.07.06
Формат 60 х 84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк 1,628. .
Обл. вид. арк.1,55. Наклад 3500 прим.

Видавництво “Каменяр” 79000. Львів, МСП, Підвальна,3
Свідоцтво Держ. реєстру: серія ДК, № 462
Ел.адреса: vyd_kamenyar@mail.lviv.ua

Віддруковано з готових діапозитивів на ПП ”Галас”
79024, Львів, Промислова, 25.